

Metody probabilistyczne i statystyka

wykład 9

zadania

str. 107 zad. 1

Oznaczmy przez $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ zmienne losowe, które przyjmują wartości równe liczbie sukcesów w poszczególnych seriach doświadczeń. Zmienne te są niezależne, o tym samym rozkładzie, wartości oczekiwanej i wariancji. Możemy zatem skorzystać z twierdzenia Lindeberga-Lévy-ego (zob. wykład 9 str.103). Rozpatrzmy zmienną losową

$$Y_{100} = \sum_{i=1}^{100} X_i,$$

dla której

$$E(Y_{100}) = nm = 100 \cdot 2 = 200, \quad D(Y_{100}) = \sigma\sqrt{n} = 1,4 \cdot \sqrt{100} = 14.$$

Ponieważ przedział $[186, 214]$ jest symetryczny względem wartości oczekiwanej równej 200, więc (zob. wykład 9 str. 104)

$$P(186 \leq Y_{100} \leq 214) = P(-z_2 \leq Z_{100} \leq z_2) \approx 2\Phi(z_2) - 1,$$

gdzie

$$z_2 = \frac{214 - 200}{14} = 1.$$

Zatem

$$P(186 \leq Y_{100} \leq 214) \approx 2\Phi(1) - 1 \approx 2 \cdot 0,8413 - 1 = 0,6826,$$

gdzie wartość $\Phi(1)$ uzyskaliśmy z tablicy standaryzowanego rozkładu normalnego.

str. 107 zad. 2

Zakup 900 sztuk towaru jest równoważny z pobraniem próbki o takiej liczebności z całej populacji towarów. Pobieranie tej próby jest losowaniem bez zwrotu, gdyż zakupiony towar nie wraca do sklepu. Odpowiada to schematowi hipergeometrycznemu (zob. wykład 4, definicja 3.14). Jeśli jednak liczba sztuk populacji jest dostatecznie duża, to charakterystyki rozkładu hipergeometrycznego są w przybliżeniu równe charakterystykom rozkładu dwumianowego (inaczej można powiedzieć, że: rozkład hipergeometryczny jest zbieżny do rozkładu dwumianowego). Ponieważ towar ma wadliwość 10%, więc prawdopodobieństwo trafienia na sztukę wadliwą jest równe $p = 0,1$, a stąd prawdopodobieństwo otrzymania sztuki dobrej wynosi $q = 0,9$. Ponieważ liczba sztuk zakupionego towaru wynosi $n = 900$, więc możemy obliczyć $np = 900 \cdot 0,1 = 90$, $npq = 900 \cdot 0,1 \cdot 0,9 = 81$, skąd $\sqrt{npq} = 9$.

Oznaczmy przez Y zmienną losową, która przyjmuje wartości równe liczbie sztuk wadliwych w partii towaru. W zadaniu pytamy o prawdopodobieństwo spełnienia nierówności

$$y_1 \leq Y \leq y_2,$$

gdzie wartości

$$y_1 = 900 \cdot 9\% = 900 \cdot 0,09 = 81, \quad y_2 = 900 \cdot 12\% = 900 \cdot 0,12 = 108$$

są odpowiednio dolną i górną liczbą sztuk wadliwych. Na podstawie twierdzenia integralnego Moivre'a-Laplace'a (zob. wykład 9, twierdzenie 6.4) mamy

$$P(y_1 \leq Y \leq y_2) \approx \Phi(z_2) - \Phi(z_1),$$

gdzie

$$z_1 = \frac{y_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{81 - 90}{9} = -1,$$
$$z_2 = \frac{y_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{108 - 90}{9} = 2.$$

Zatem

$$\begin{aligned} P(81 \leq Y \leq 108) &\approx \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) - (1 - \Phi(1)) = \Phi(2) + \Phi(1) - 1 \\ &\approx 0,9772 + 0,8413 - 1 = 0,8185, \end{aligned}$$

przy czym skorzystaliśmy tu z tablicy standaryzowanego rozkładu normalnego.