

Metody probabilistyczne i statystyka

wykład 6

zadania

str. 69 zad. 1

Ponieważ

$$P(X \leq 0) = 0,05 + 0,12 + 0,18 + 0,32 = 0,67 > \frac{1}{2}$$

oraz

$$P(X \geq 0) = 0,32 + 0,23 + 0,07 + 0,03 = 0,65 > \frac{1}{2},$$

więc na podstawie definicji 3.35 (zob. wykład 6) mamy $Me = 0$. Z kolei na podstawie definicji 3.36 (zob. także wykład 6) otrzymujemy $Mo = 0$, bo prawdopodobieństwo $P(X = 0) = 0,32$ jest największe.

Zgodnie z definicją 3.33 (zob. wykład 6) wskaźnik asymetrii jest dany wzorem

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{D^3(X)}, \quad (1)$$

gdzie μ_3 oznacza moment centralny rzędu 3 (zob. wykład 5, definicja 3.25), a $D(X)$ – odchylenie standardowe (zob. wykład 5, definicja 3.26). Zgodnie z definicjami mamy

$$\mu_3 = \sum_{k=1}^7 (x_k - m_1)^3 p_k,$$

gdzie $m_1 = E(X)$ oznacza wartość oczekiwaną oraz

$$D^2(X) = \sum_{k=1}^7 (x_k - m_1)^2 p_k,$$

a wartość $D^3(X)$ można obliczyć z wzoru

$$D^3(X) = D^2(X) \cdot D(X) = D^2(X) \cdot \sqrt{D^2(X)}.$$

Uwzględniając dane otrzymujemy

$$\begin{aligned} m_1 = E(X) &= \sum_{k=1}^7 x_k p_k \\ &= (-3) \cdot 0,05 + (-2) \cdot 0,12 + (-1) \cdot 0,18 + 0 \cdot 0,32 + 1 \cdot 0,23 + 2 \cdot 0,07 + 3 \cdot 0,03 = -0,11, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_3 &= [-3 - (-0,11)]^3 \cdot 0,05 + [-2 - (-0,11)]^3 \cdot 0,12 + [-1 - (-0,11)]^3 \cdot 0,18 \\
&\quad + [0 - (-0,11)]^3 \cdot 0,32 + [1 - (-0,11)]^3 \cdot 0,23 + [2 - (-0,11)]^3 \cdot 0,07 \\
&\quad + [3 - (-0,11)]^3 \cdot 0,03 \\
&= (-2,89)^3 \cdot 0,05 + (-1,89)^3 \cdot 0,12 + (-0,89)^3 \cdot 0,18 + (0,11)^3 \cdot 0,32 \\
&\quad + (1,11)^3 \cdot 0,23 + (2,11)^3 \cdot 0,07 + (3,11)^3 \cdot 0,03 = \dots \approx -0,27, \\
D^2(X) &= [-3 - (-0,11)]^2 \cdot 0,05 + [-2 - (-0,11)]^2 \cdot 0,12 + [-1 - (-0,11)]^2 \cdot 0,18 \\
&\quad + [0 - (-0,11)]^2 \cdot 0,32 + [1 - (-0,11)]^2 \cdot 0,23 + [2 - (-0,11)]^2 \cdot 0,07 \\
&\quad + [3 - (-0,11)]^2 \cdot 0,03 \\
&= (-2,89)^2 \cdot 0,05 + (-1,89)^2 \cdot 0,12 + (-0,89)^2 \cdot 0,18 + (0,11)^2 \cdot 0,32 \\
&\quad + (1,11)^2 \cdot 0,23 + (2,11)^2 \cdot 0,07 + (3,11)^2 \cdot 0,03 = \dots \approx 1,88, \\
D^3(X) &= 1,88 \cdot \sqrt{1,88} = \dots \approx 2,58.
\end{aligned}$$

Po podstawieniu do wzoru (1) dostajemy

$$\gamma_1 \approx \frac{-0,27}{2,58} \approx -0,1.$$

Zgodnie z definicją 3.34 (zob. wykład 6) wskaźnik skupienia (kurtuoza) dany jest wzorem

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{D^4(X)}, \quad (2)$$

a eksces –

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3, \quad (3)$$

gdzie μ_4 oznacza moment centralny rzędu czwartego, który na podstawie definicji 3.25 (zob. wykład 5) jest określony wzorem

$$\mu_4 = \sum_{k=1}^7 (x_k - m_1)^4 p_k.$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\mu_4 &= [-3 - (-0,11)]^4 \cdot 0,05 + [-2 - (-0,11)]^4 \cdot 0,12 + [-1 - (-0,11)]^4 \cdot 0,18 \\
&\quad + [0 - (-0,11)]^4 \cdot 0,32 + [1 - (-0,11)]^4 \cdot 0,23 + [2 - (-0,11)]^4 \cdot 0,07 \\
&\quad + [3 - (-0,11)]^4 \cdot 0,03 = \dots \approx 9,68.
\end{aligned}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych do wzorów (2) i (3) mamy

$$\beta_2 \approx \frac{9,68}{1,88 \cdot 1,88} \approx 2,74, \quad \gamma_2 \approx 2,74 - 3 = -0,26.$$

Eksces ujemny wskazuje, że wykres badanego rozkładu jest niższy i bardziej płaski w stosunku do rozkładu normalnego.

str. 70 zad. 4

Zgodnie z definicją 3.35 (zob. wykład 6) należy wyznaczyć taką wartość Me , by

$$\int_{-\infty}^{Me} f(x)dx = \frac{1}{2}.$$

Dla gęstości prawdopodobieństwa podanej w zadaniu mamy

$$\int_{-\infty}^{Me} f(x)dx = \int_0^{Me} \frac{1}{9} x^2 dx = \frac{1}{9} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{Me} = \frac{1}{27} (Me)^3$$

i mamy

$$\frac{1}{27} (Me)^3 = \frac{1}{2},$$

skąd

$$Me = \frac{3}{\sqrt[3]{2}}.$$

Z uwagi na nieciągłość w punkcie $x = 3$, funkcja $f(x)$ nie ma maksimum lokalnego. Stąd moda Mo nie istnieje.

str. 72 zad. 1

Najpierw nierówność z bezwzględną wartością doprowadzamy do podwójnej nierówności:

$$P(|X| > 6) = 1 - P(|X| \leq 6) = 1 - P(-6 \leq X \leq 6).$$

Następnie wykonujemy standaryzację zmiennej losowej X (odejmujemy od niej wartość oczekiwaną $m = 2$ i całość dzielimy przez odchylenie standardowe $\sigma = 4$):

$$P(-6 \leq X \leq 6) = P\left(\frac{-6-2}{4} \leq \frac{X-2}{4} \leq \frac{6-2}{4}\right) = P(-2 \leq T \leq 1),$$

gdzie T oznacza zmienną losową o standaryzowanym rozkładzie normalnym $N(0, 1)$. Prawdopodobieństwo, że zmienna losowa przyjmuje wartości z określonego przedziału jest równe różnicy dystrybuant na końcach przedziału, czyli

$$\begin{aligned} P(-2 \leq T \leq 1) &= \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) - (1 - \Phi(2)) = \Phi(1) + \Phi(2) - 1 \\ &\approx 0,8413 + 0,9773 - 1 = 0,8186, \end{aligned}$$

przy czym wykorzystaliśmy tu fakt, że $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, a wartości $\Phi(1)$ i $\Phi(2)$ odczytaliśmy z tablic rozkładu $N(0, 1)$. Ostatecznie mamy

$$P(|X| > 6) \approx 1 - 0,8186 = 0,1814.$$

str. 72 zad. 2

Postępując podobnie, jak w poprzednim zadaniu, mamy

$$\begin{aligned}
P(|X - 1| \geq 1) &= 1 - P(|X - 1| < 1) = 1 - P(-1 < X - 1 < 1) \\
&= 1 - P\left(\frac{-1-2}{5} < \frac{X-3}{5} < \frac{1-2}{5}\right) = 1 - P\left(-\frac{3}{5} < T < -\frac{1}{5}\right) \\
&= 1 - \left[\Phi\left(-\frac{1}{5}\right) - \Phi\left(-\frac{3}{5}\right)\right] = 1 - \left\{1 - \Phi\left(\frac{1}{5}\right) - \left[1 - \Phi\left(\frac{3}{5}\right)\right]\right\} \\
&= 1 + \Phi\left(\frac{1}{5}\right) - \Phi\left(\frac{3}{5}\right) = 1 + \Phi(0,2) - \Phi(0,6) \\
&\approx 1 + 0,5793 - 0,7268 = 0,8525.
\end{aligned}$$

str. 72 zad. 4

Ad A.

Najpierw pozbywamy się bezwzględnej wartości w nierówności. Mamy

$$P(|X - 2| < a) = P(-a < X - 2 < a).$$

Standaryzujemy zmienną losową X :

$$P(-a < X - 2 < a) = P\left(-\frac{a}{4} < \frac{X-2}{4} < \frac{a}{4}\right) = P\left(-\frac{a}{4} < T < \frac{a}{4}\right),$$

gdzie T oznacza zmienną losową standaryzowaną (o rozkładzie $N(0, 1)$). Korzystając z faktu, że prawdopodobieństwo przyjęcia przez zmienną losową wartości z pewnego przedziału jest równe różnicy dystrybuant na końcach przedziału, otrzymujemy

$$P\left(-\frac{a}{4} < T < \frac{a}{4}\right) = \Phi\left(\frac{a}{4}\right) - \Phi\left(-\frac{a}{4}\right) = \Phi\left(\frac{a}{4}\right) - \left[1 - \Phi\left(\frac{a}{4}\right)\right] = 2\Phi\left(\frac{a}{4}\right) - 1,$$

gdzie Φ oznacza dystrybuantę rozkładu $N(0, 1)$. Skorzystaliśmy tu także z faktu, że $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. Mamy zatem równość

$$2\Phi\left(\frac{a}{4}\right) - 1 = 0,9,$$

czyli

$$2\Phi\left(\frac{a}{4}\right) = 1,9,$$

skąd

$$\Phi\left(\frac{a}{4}\right) = 0,95.$$

W tablicy rozkładu $N(0, 1)$ musimy znaleźć taką wartość argumentu, dla której dystrybuanta jest równa 0,95. Mamy

$$\frac{a}{4} \approx 1,65,$$

skąd $a \approx 6,6$. Zauważmy, że w tablicy nie ma wartości dystrybuanty równej 0,95. Skorzystaliśmy tu z wartości przybliżonej 0,9505.

Ad B.

Postępując podobnie, jak w p. A, mamy

$$\begin{aligned}P(|X - 2| < 4k) &= P(-4k < X - 2 < 4k) = P\left(-\frac{4k}{4} < \frac{X - 2}{4} < \frac{4k}{4}\right) = P(-k < T < k) \\&= \Phi(k) - \Phi(-k) = \Phi(k) - [1 - \Phi(k)] = 2\Phi(k) - 1.\end{aligned}$$

Otrzymujemy zatem równość

$$2\Phi(k) - 1 = 0,8,$$

skąd

$$\Phi(k) = 0,9.$$

W tablicy dystrybucyjnej $\Phi(x)$ najbliższą wartością do 0,9 jest 0,9032. Można by przyjąć, że $k \approx 1,30$, ale ten wynik jest obarczony dość dużym błędem. Z kolei dla wartości dystrybucyjnej 0,8944 mamy $k = 1,25$. Spróbujemy uzyskać wynik bardziej dokładny. W tym celu wykonamy interpolację. Przez punkty $(1,25; \Phi(1,25)) = (1,25; 0,8944)$ i $(1,30; \Phi(1,30)) = (1,30; 0,9032)$ przeprowadzimy prostą. Równanie tej prostej ma postać

$$\begin{aligned}\frac{y - 0,8944}{0,9032 - 0,8944} &= \frac{x - 1,25}{1,30 - 1,25}, \\ \frac{y - 0,8944}{0,0088} &= \frac{x - 1,25}{0,05}, \\ y - 0,8944 &= \frac{0,0088}{0,05}(x - 1,25), \\ y - 0,8944 &= 0,176(x - 1,25), \\ y &= 0,8944 + 0,176x - 0,22, \\ y &= 0,176x + 0,6744.\end{aligned}$$

Dla $y = 0,9$ otrzymujemy stąd

$$\begin{aligned}0,9 &= 0,176x + 0,6744, \\ 0,9 - 0,6744 &= 0,176x, \\ 0,2256 &= 0,176x,\end{aligned}$$

skąd

$$x = \frac{0,2256}{0,176} \approx 1,2818.$$

Uzyskana wartość $x = k$ jest lepszym przybliżeniem szukanej wartości.

str. 74 zad. 1

Zgodnie z definicją 3.35 (zob. wykład 6) należy wyznaczyć taką wartość Me , dla której

$$\int_{-\infty}^{Me} f(x)dx = \frac{1}{2}.$$

Uwzględniając wzór na funkcję gęstości prawdopodobieństwa w rozkładzie logarytmiczno-normalnym, mamy stąd

$$\int_0^{Me} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \frac{1}{2}.$$

W celu obliczenia całki wykonujemy podstawienie

$$\frac{\ln x - m}{\sigma} = u.$$

Po zróżniczkowaniu mamy

$$\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{x} dx = du.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \int_0^{Me} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}\right) dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{Me} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma}\right)^2\right) \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln Me - m}{\sigma}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = \Phi\left(\frac{\ln Me - m}{\sigma}\right), \end{aligned}$$

gdzie Φ oznacza dystrybuantę rozkładu $N(0, 1)$. Otrzymaliśmy zatem równanie

$$\Phi\left(\frac{\ln Me - m}{\sigma}\right) = \frac{1}{2}.$$

Z tablicy rozkładu $N(0, 1)$ otrzymujemy

$$\frac{\ln Me - m}{\sigma} = 0,$$

czyli

$$\ln Me - m = 0,$$

$$\ln Me = m,$$

skąd $Me = e^m$, bo

$$\ln e^m = m \ln e = m \cdot 1 = m.$$