

III. ZMIENNE LOSOWE JEDNOWYMIAROWE

3.1. Zmienna losowa i pojęcie rozkładu prawdopodobieństwa

W dotychczas rozpatrywanych przykładach każdemu zdarzeniu była przyporządkowana odpowiednia wartość liczbową. Ta przypadkowa wielkość, zwana *zmienną losową*, jest funkcją, której dziedziną jest podstawowy zbiór zdarzeń.

Każde zdarzenie losowe zachodzi z odpowiednim prawdopodobieństwem, a ponieważ w przypadku zajścia określonego zdarzenia zmienna losowa przyjmuje określoną wartość, to i wartości tej jest przyporządkowane odpowiednie prawdopodobieństwo.

Definicja 3.1. Niech będzie dana algebra prawdopodobieństwa $[I, S, P]$ (I – zbiór zdarzeń elementarnych, S – borelowska algebra zdarzeń, P – funkcja prawdopodobieństwa). Przez *zmienną losową* rozumiemy określoną dla każdego zdarzenia elementarnego e należącego do zbioru I rzeczywistą funkcję $X = X(e)$, której wszystkie przeciwobrazy należą do algebry S .

Definicja 3.2. *Przeciwobrazem funkcji $X = X(e)$ nazywamy określone przez nierówność $X < x$ zdarzenie A_x należące do algebry S (x oznacza dowolną liczbę rzeczywistą).*

Przykład 3.1. Pewna gra polega na rzucie dwiema monetami i otrzymaniu wygranej 6 zł w przypadku dwu reszek i przegraniu 2 zł w pozostałych przypadkach. Wygraną będzie tutaj funkcja, której dziedziną jest następujący zbiór zdarzeń elementarnych:

$$RR, RO, OR, OO.$$

Dla pierwszego zdarzenia funkcja ma wartość 6 i wartość ta pojawia się z takim samym prawdopodobieństwem, jak zdarzenie RR , tj. $1/4$. W pozostałych przypadkach funkcja ma wartość -2 , a prawdopodobieństwo wystąpienia tej wartości jest równe $3/4$. Wartość wygranej jest zatem zmienną losową.

Przeciwobrazem odpowiadającym wartości $X < -2$ jest zdarzenie niemożliwe, nierówności $X < 6$ – zdarzenie, na które składają się zdarzenia elementarne OR , RO i OO , a przeciwobrazem odpowiadającym nierówności $X \geq 6$ – zdarzenie polegające na wyrzuceniu dowolnego układu R i O (nierówność $X \geq 6$ należy interpretować jako nierówność $X < x$, gdzie $x \geq 6$).

Definicja 3.3. Prawdopodobieństwo przyjęcia przez zmienną losową X wartości mniejszej od x oznaczamy przez $F(x)$ i nazywamy *dystrybuantą* lub *funkcją rozkładu zmiennej losowej X* , tj.

$$F(x) = P(X < x).$$

Twierdzenie 3.1. *Dystrybuanta $F(x)$ dowolnej zmiennej losowej X jest funkcją:*

a) *co najmniej lewostronnie ciągłą, tzn.*

$$\lim_{x_n \rightarrow x-0} F(x_n) = F(x),$$

b) *niemalejącą, tzn.*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2),$$

c) *spełniającą warunki*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad i \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1,$$

co często zapisujemy jako $F(-\infty) = 0$ i $F(+\infty) = 1$.

Dowód pomijamy. ■

Prawdziwe jest też twierdzenie odwrotne.

Twierdzenie 3.2. *Jeżeli funkcja $F(x)$ spełnia warunki a) – c) podane w twierdzeniu 3.1, to jest ona dystrybuantą pewnego rozkładu.*

Dowód pomijamy. ■

Wyróżniamy dwa rodzaje zmiennej losowej: skokową i ciągłą.

Definicja 3.4. *Zmienną losową skokową nazywamy taką zmienną losową X , dla której istnieje funkcja $P(X = x_k) = p_k > 0$ ($k = 0, 1, \dots$), taka że dla każdej rzeczywistej wartości x zachodzi relacja*

$$F(x) = \sum_{x_k < x} P(X = x_k),$$

tzn. prawdopodobieństwo $P(X < x)$ oblicza się przez zsumowanie wszystkich prawdopodobieństw $P(X = x_k)$ dla wartości x_k mniejszych od x .

Definicja 3.5. *Funkcję $P(X = x_k) = p_k$ nazywamy funkcją prawdopodobieństwa zmiennej losowej X .*

Zauważmy, że z definicji 3.3 wynika, że

$$\sum_k p_k = 1.$$

Funkcję prawdopodobieństwa można podać w postaci wzoru lub tabeli:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X = x_k)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Zauważmy, że

$$P(a \leq X < b) = \sum_{a \leq x_k < b} P(X = x_k)$$

i po uwzględnieniu wzoru podanego w definicji 3.4 mamy

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a).$$

Jeśli zmienna losowa skokowa przyjmuje także wartość b , to

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) + P(X = b).$$

Definicja 3.6. Zmienną losową ciągłą nazywamy zmienną X , dla której istnieje taka nieujemna funkcja $f(x)$, że dla każdej rzeczywistej wartości x zachodzi

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Definicja 3.7. Funkcję $f(x)$ spełniającą równanie podane w definicji 3.6 nazywamy *gęstością prawdopodobieństwa* albo *gęstością zmiennej losowej ciągłej*.

Mówimy, że dany jest *rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej*, jeśli znana jest dystrybuenta albo gdy znana jest funkcja prawdopodobieństwa w przypadku zmiennej losowej skokowej lub gęstość prawdopodobieństwa w przypadku zmiennej losowej ciągłej.

Zauważmy, że

$$F'(x) = f(x) \text{ i } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Ponadto dla zmiennej losowej ciągłej mamy

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

Ponieważ dla zmiennej losowej ciągłej prawdopodobieństwo przyjęcia określonej wartości liczbowej jest równe zero, więc dołączenie do przedziału $[a, b)$ jego końca $x = b$ nie zmienia wartości prawdopodobieństwa, czyli

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

3.2. Pewne rozkłady zmiennej losowej skokowej

Przykład 3.2. Podać rozkład zmiennej losowej, która przyjmuje wartości równe sumie oczek na dwóch kostkach. Obliczyć $P(5 \leq X < 8)$ oraz wykreślić dystrybuentę tej zmiennej.

Zmienna losowa może przyjąć wartości będące liczbami naturalnymi z przedziału $[2, 12]$. Oznaczmy:

I_i – otrzymanie i oczek na pierwszej kostce,

II_i – otrzymanie i oczek na drugiej kostce.

Mamy:

$$P(X = 2) = P(I_1 \cdot II_1) = P(I_1) \cdot P(II_1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36},$$

$$P(X = 3) = P(I_1 \cdot II_2 + I_2 \cdot II_1) = P(I_1) \cdot P(II_2) + P(I_2) \cdot P(II_1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{36},$$

$$P(X = 4) = \dots = \frac{3}{36},$$

$$P(X = 5) = \dots = \frac{4}{36},$$

$$P(X = 6) = \dots = \frac{5}{36},$$

$$P(X = 7) = \dots = \frac{6}{36},$$

$$P(X = 8) = \dots = \frac{5}{36},$$

$$P(X = 9) = \dots = \frac{4}{36},$$

$$P(X = 10) = \dots = \frac{3}{36},$$

$$P(X = 11) = \dots = \frac{2}{36},$$

$$P(X = 12) = \dots = \frac{1}{36}.$$

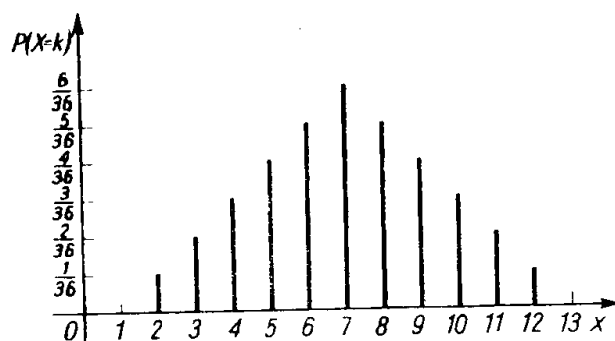
Można sprawdzić, że

$$\sum_{k=2}^{12} P(X = k) = 1.$$

Tabela rozkładu ma postać

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Wykres tego rozkładu jest następujący:



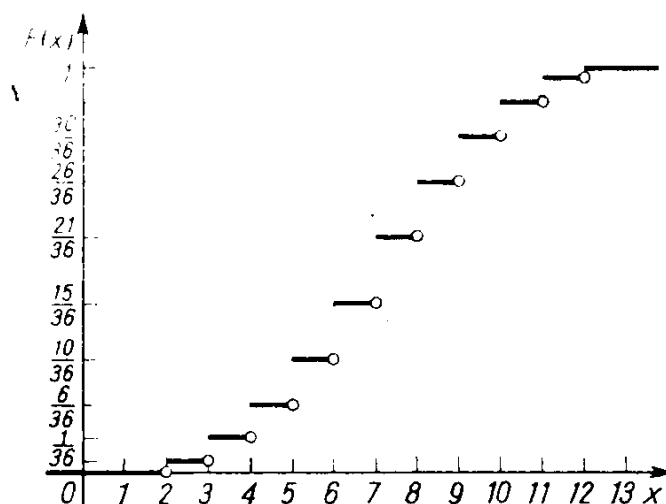
Widzimy, że rozkład jest symetryczny, a jego osią symetrii jest prosta $x = 7$. Szukane prawdopodobieństwo jest równe

$$P(5 \leq X < 8) = \sum_{k=5}^7 P(X=k) = \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} = \frac{5}{12}.$$

W celu wykreślenia dystrybuanty konstruujemy następującą tabelę:

x	... 2	... 3	... 4	... 5	... 6	... 7	... 8	... 9	... 10	... 11	... 12	...
$F(x)$	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	1

Wykres dystrybuanty ma postać



i mamy

$$P(5 \leq X < 8) = F(8) - F(5) = \frac{21}{36} - \frac{6}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}.$$

Rozkład jednopunktowy

Zmienna o takim rozkładzie przyjmuje tylko jedną wartość.

Definicja 3.8. Mówimy, że zmienna losowa podlega *rozkładowi jednopunktowemu*, jeżeli istnieje taki punkt x_0 , że $P(X = x_0) = 1$.

Dystrybuanta tego rozkładu dana jest wzorem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq x_0, \\ 1 & \text{dla } x > x_0. \end{cases}$$

Rozkład dwupunktowy

Definicja 3.9. Mówimy, że zmienna losowa X ma *rozkład dwupunktowy*, jeśli z dodatnimi prawdopodobieństwami przyjmuje jedynie dwie wartości x_1 i x_2 .

Funkcja prawdopodobieństwa jest określona następująco:

$$P(X = x_2) = p, \quad P(X = x_1) = 1 - p = q, \quad 0 < p < 1.$$

Często przyjmuje się, że $x_2 = 1$ oraz $x_1 = 0$ i wówczas funkcja prawdopodobieństwa ma postać

$$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p = q, \quad 0 < p < 1.$$

Rozkład taki nazywa się *rozkładem zero-jedynkowym*.

Modelem rozkładu zero-jedynkowego może być przy $p = q = 1/2$ rzut monetą. Jeśli zdarzeniu polegającemu na wyrzuceniu orła przypiszemy wartość 1, a wyrzuceniu reszki wartość 0, to mamy

$$P(X = 1) = \frac{1}{2}, \quad P(X = 0) = \frac{1}{2}.$$

Dystrybuanta rozkładu dwupunktowego dana jest wzorem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq x_1, \\ q & \text{dla } x_1 < x \leq x_2, \\ 1 & \text{dla } x > x_2. \end{cases}$$

Rozkład dwumianowy (Bernoulliego)

Rozkład ten można otrzymać z rozkładów zero-jedynkowych. Niech zmienna losowa X równa się sumie n zmiennych losowych X_i , czyli

$$X = \sum_{k=1}^n X_i,$$

z których każda może przyjąć wartość 1 z prawdopodobieństwem p lub wartość 0 z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$, niezależnie od wartości przyjmowanych przez pozostałe zmienne. Zmienna X może zatem przyjąć wartości z przedziału $[0, n]$, przy czym równość $X = k$ oznacza,

że k spośród n zmiennych X_i przyjmuje wartość 1, a $n - k$ zmiennych X_i przyjmuje wartość 0. Dla każdej wartości k może to zajść na $\binom{n}{k}$ sposobów. Zatem wzór na funkcję prawdopodobieństwa zmiennej losowej X jest następujący:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}, \quad q = 1 - p, \quad (*)$$

przy czym $k = 0, 1, \dots, n$.

Definicja 3.10. Mówimy, że zmienna losowa X ma *rozkład dwumianowy (Bernoulliego)*, jeśli jej funkcja prawdopodobieństwa jest określona wzorem (*).

Dystrybuantę rozkładu dwumianowego określa wzór postaci

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{0 \leq k < x} \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}.$$

Zauważmy, że dla $n = 1$ z rozkładu dwumianowego otrzymujemy rozkład zero-jedynkowy.

Rozkład Pascala

Definicja 3.11. Mówimy, że zmienna losowa X_k ma *rozkład Pascala*, jeśli jej funkcja prawdopodobieństwa dana jest wzorem

$$P(X_k = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k \cdot q^{n-k}, \quad q = 1 - p,$$

gdzie k oznacza dowolną ustaloną liczbę naturalną, a $n = k, k+1, \dots$.

Zmienna X_k ma swoją interpretację w tzw. zagadnieniu Pascala. Przyjmuje ona wartości równe liczbie niezależnych doświadczeń przeprowadzanych aż do otrzymania k sukcesów przy stałym prawdopodobieństwie sukcesu równym p .

W szczególnym przypadku, gdy $k = 1$, otrzymujemy tzw. *rozkład geometryczny* określony wzorem

$$P(X_1 = n) = p \cdot q^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Rozkład Poissona

Niech zmienna X_n ma rozkład dwumianowy, czyli

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Żałóżmy, że liczba n dąży do nieskończoności oraz że iloczyn $n \cdot p$ jest stały i równy $\lambda > 0$. Tak określona nowa zmienna losowa X może przyjąć każdą wartość całkowitą z przedziału $[0, +\infty)$. Prawdopodobieństwo przyjęcia przez tę zmienną wartości k jest dane znanym wzorem Poissona (zob. twierdzenie 2.2 w p. 2.3), tj.

$$P(X = k) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (**)$$

Definicja 3.12. Mówimy, że zmienna losowa X ma *rozkład Poissona*, jeśli jej funkcja prawdopodobieństwa dana jest wzorem (**).

Z uwagi na sposób uzyskania podanego wzoru mówimy, że rozkład Poissona jest rozkładem granicznym rozkładu Bernoulliego.

Rozkład Pólya

Definicja 3.13. Mówimy, że zmienna losowa X ma *rozkład Pólya*, jeśli jej funkcja prawdopodobieństwa dana jest wzorem

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot \frac{p \cdot (p + \alpha) \cdot \dots \cdot (p + (k-1)\alpha) \cdot q \cdot (q + \alpha) \cdot \dots \cdot (q + (n-k-1)\alpha)}{(1 + \alpha) \cdot (1 + 2\alpha) \cdot \dots \cdot (1 + (n-1)\alpha)},$$

gdzie $k = 0, 1, \dots, n$ oraz $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $k\alpha \geq -p$, $(n-k)\alpha \geq -q$.

Rozkładowi temu podlega zmienna losowa przyjmująca wartości równe liczbie sukcesów przy n -krotnie przeprowadzonych doświadczeniach według schematu Pólya.

Rozkład hipergeometryczny

Definicja 3.14. Mówimy, że zmienna losowa X ma *rozkład hipergeometryczny*, jeśli jej funkcja prawdopodobieństwa dana jest wzorem

$$P(X = k) = \frac{\binom{b}{k} \cdot \binom{c}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

gdzie $k = 0, 1, \dots, n$, a b i c oznaczają liczby naturalne, takie że $b + c = N \geq n$.

Rozkładowi temu podlega zmienna losowa przyjmująca wartości równe liczbie sukcesów przy n -krotnie przeprowadzonych doświadczeniach według schematu Pólya, gdy $s = -1$.

Zadania

1. Podać rozkład zmiennej losowej, która przyjmuje wartości równe sumie oczek na trzech kostkach oraz wykreślić dystrybuantę.
2. Zorganizowano następującą grę: rzucamy dwiema kostkami; jeżeli suma oczek jest równa 2, to otrzymujemy 10 zł, jeżeli suma oczek jest równa 3, to otrzymujemy 5 zł, a w każdym pozostałym przypadku płacimy 1 zł. Podać rozkład tej zmiennej losowej.

3. Zmienna losowa X przyjmuje wartości równe liczbom naturalnym k z prawdopodobieństwami

$$P(X = k) = \frac{c}{3^k}, \text{ gdzie } c \text{ oznacza liczbę stałą. Wyznaczyć wartość } c \text{ oraz obliczyć } P(X \geq 4).$$

4. Dystrybuanta zmiennej losowej X dana jest wzorem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 1, \\ \frac{1}{7} & \text{dla } 1 < x \leq 2, \\ \frac{3}{7} & \text{dla } 2 < x \leq 5, \\ \frac{6}{7} & \text{dla } 5 < x \leq 10, \\ 1 & \text{dla } x > 10. \end{cases}$$

A. Obliczyć $P(5 \leq X \leq 8)$.

B. Określić funkcję prawdopodobieństwa.

3.3. Pewne rozkłady zmiennej losowej ciągłej

Przykład 3.3. Zmienna losowa X podlega rozkładowi według gęstości danej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ Cx & \text{dla } 0 \leq x \leq 4, \\ 0 & \text{dla } x > 4. \end{cases}$$

A. Obliczyć stałą C .

B. Podać dystrybuantę.

C. Obliczyć $P(1 \leq X \leq 2)$.

Ad. A)

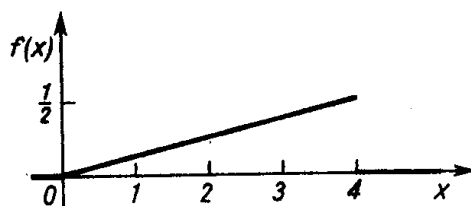
Stałą C obliczymy z warunku

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Mamy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^4 Cx dx + \int_4^{+\infty} 0 dx = C \int_0^4 x dx = C \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = 8C,$$

czyli $8C = 1$, skąd wynika, że $C = 1/8$. Wykres funkcji gęstości jest zatem następujący:



Ad. B)

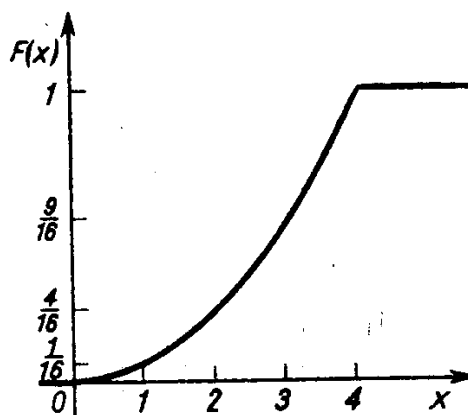
Wyznaczamy dystrybuantę:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x \frac{t}{8} dt = \frac{t^2}{16} \Big|_0^x = \frac{x^2}{16} \quad \text{dla } 0 < x \leq 4,$$

czyli

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0, \\ \frac{x^2}{16} & \text{dla } 0 < x \leq 4, \\ 1 & \text{dla } x > 4. \end{cases}$$

Wykres dystrybuanty jest następujący:



Ad. C)

Szukane prawdopodobieństwo można obliczyć jako pole trapezu (z wykresu funkcji gęstości):

$$P(1 \leq X \leq 2) = \frac{1}{2}(f(1) + f(2)) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8} + \frac{2}{8}\right) = \frac{3}{16}$$

lub z różnicy wartości dystrybuant:

$$P(1 \leq X \leq 2) = F(2) - F(1) = \frac{4}{16} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}.$$

Rozkład jednostajny

Definicja 3.15. Mówimy, że zmienna losowa X ma *rozkład jednostajny (równoramienny, prostokątny)*, gdy jej gęstość prawdopodobieństwa jest określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < a, \\ C & \text{dla } a \leq x \leq a + \frac{1}{C}, \\ 0 & \text{dla } x > a + \frac{1}{C}, \end{cases}$$

gdzie liczba a jest dowolna, a $C > 0$.

W poszczególnych przypadkach dystrybuanta tego rozkładu ma następujące postacie:

– dla $x \leq a$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0,$$

– dla $a < x \leq a + \frac{1}{C}$

$$F(x) = \int_a^x C dt = C t \Big|_a^x = C(x - a),$$

– dla $x > a + \frac{1}{C}$

$$F(x) = 1.$$

Zatem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq a, \\ C(x - a) & \text{dla } a < x \leq a + \frac{1}{C}, \\ 1 & \text{dla } x > a + \frac{1}{C}. \end{cases}$$

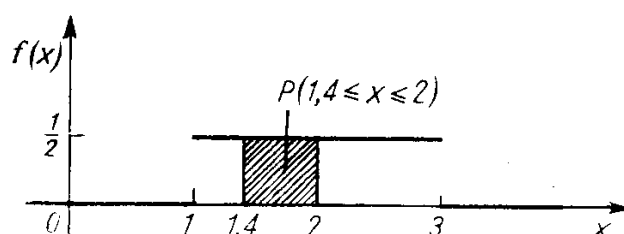
Przykład 3.4. Zmienna losowa X przyjmuje dowolną wartość z przedziału $[1, 3]$. Zakładając, że jej rozkład prawdopodobieństwa jest jednostajny, podać gęstość, dystrybuantę oraz obliczyć $P(1,4 \leq X \leq 2)$.

Podana zmienna losowa nie przyjmuje wartości w przedziałach $(-\infty, 1)$ i $(3, +\infty)$, tzn. $P(-\infty < X < 1) = 0$ i $P(3 < X < +\infty) = 0$, co oznacza, że gęstość prawdopodobieństwa w tych przedziałach jest równa 0. Ponieważ $P(1 \leq X \leq 3) = 1$, to gęstość $f(x)$ musi być taka, aby pole prostokąta zawartego pomiędzy odcinkami $[1, 3]$ i wykresem funkcji było równe 1. Stąd $C \cdot (3 - 1) = 1$, czyli $C = 1/2$. Zatem gęstość jest następująca:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{dla } 1 \leq x \leq 3, \\ 0 & \text{dla } x > 3. \end{cases}$$

Szukane prawdopodobieństwo jest równe polu prostokąta na odcinkiem $[1,4; 2]$ (zob. rysunek), czyli

$$P(1,4 \leq X \leq 2) = \frac{1}{2} \cdot (2 - 1,4) = 0,3.$$

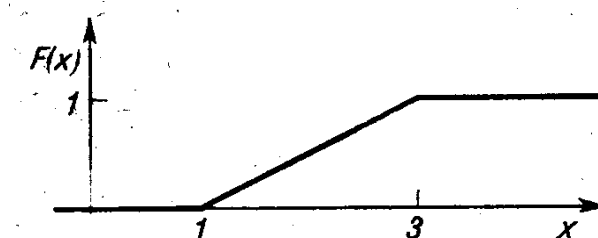


W przedziale $(1, 3]$ dystrybuanta jest równa

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} t \Big|_1^x = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2}.$$

Zatem (zob. rysunek)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 1, \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & \text{dla } 1 < x \leq 3, \\ 1 & \text{dla } x > 3. \end{cases}$$



Rozkład trójkątny

Definicja 3.16. Jeżeli obrazem geometrycznym gęstości jest trójkąt, to mówimy, że zmienna losowa ma *rozkład trójkątny*.

Przykład 3.5. Zmienna losowa podlega rozkładowi według trójkąta równobocznego o wierzchołkach $A(0, 0)$, $B(a, 0)$ i $C(x, y)$. Dobrać wartości a , x i y oraz napisać gęstość prawdopodobieństwa.

Trójkąt ma być równoboczny, więc $x = \frac{1}{2}a$, a $y = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (wysokość). Pole trójkąta powinno być równe 1, czyli

$$\frac{1}{2}a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 1,$$

skąd

$$a^2 = \frac{4}{\sqrt{3}}, \text{ tj. } a = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}.$$

Wierzchołkami są zatem punkty $A(0, 0)$, $B\left(\frac{2}{\sqrt[4]{3}}, 0\right)$, $C\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \sqrt[4]{3}\right)$, a więc funkcja gęstości jest następująca:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0, \\ \sqrt{3}x & \text{dla } 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \\ -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt[4]{3}}{3} & \text{dla } \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \leq x \leq \frac{2}{\sqrt[4]{3}}, \\ 0 & \text{dla } x \geq \frac{2}{\sqrt[4]{3}}. \end{cases}$$

Przykład 3.6. Zmienna losowa X podlega rozkładowi według trójkąta utworzonego przez oś odciętych, oś rzędnych oraz prostą $x + y = a$. Podać wartość $a > 0$, gęstość, dystrybuantę i obliczyć $P(0 \leq X \leq a/2)$.

Trójkąt jest równoramienny o boku a , a więc jego pole $S = a^2/2$. Pole to powinno być równe 1 i $a > 0$, a więc $a = \sqrt{2}$. Ponieważ $f(x) = y = a - x$ dla $x \in [0, a]$, więc funkcja gęstości ma postać

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ \sqrt{2} - x & \text{dla } 0 \leq x \leq \sqrt{2}, \\ 0 & \text{dla } x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

Dla $0 < x \leq \sqrt{2}$ mamy

$$\int_0^x (\sqrt{2} - t) dt = \sqrt{2}t - \frac{t^2}{2} \Big|_0^x = \sqrt{2}x - \frac{x^2}{2},$$

czyli dystrybuanta jest następująca:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0, \\ \sqrt{2}x - \frac{x^2}{2} & \text{dla } 0 < x \leq \sqrt{2}, \\ 1 & \text{dla } x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

Mając wzór na dystrybuantę, łatwo wyznaczyć prawdopodobieństwo:

$$P\left(0 \leq X \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - F(0) = \frac{3}{4}.$$

Zadania

1. Zmienna losowa X ma rozkład według gęstości danej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ C \cdot \sin x & \text{dla } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}, \\ 0 & \text{dla } x > \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

- A. Obliczyć stałą C .
B. Podać dystrybuantę.
C. Obliczyć $P(\pi/6 \leq X \leq \pi/4)$.

2. Zmienna losowa X podlega rozkładowi według gęstości danej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 1, \\ \ln x & \text{dla } 1 \leq x \leq a, \\ 0 & \text{dla } x > a. \end{cases}$$

- A. Obliczyć stałą a .
B. Podać dystrybuantę.
C. Obliczyć $P(2 \leq X \leq e)$.

3. Strzałka minutowa zegara elektrycznego zmienia położenie w końcu każdej minuty. Jeżeli strzałka wskazuje a minut, to rzeczywisty czas t jest zmienną losową przyjmującą wartości z przedziału $[a, a + 1]$. Znaleźć gęstość prawdopodobieństwa zmiennej t .
4. Zmienna losowa przyjmuje wartości z przedziału $[1, 7]$, przy czym prawdopodobieństwo przyjęcia przez nią wartości z wycinka przedziału $[3, 4]$ jest pięć razy większe od prawdopodobieństwa przyjęcia wartości z wycinka o tej samej długości z przedziału $[1, 3]$, a także z przedziału $(4, 7]$. Podać gęstość, dystrybuantę i obliczyć $P(3,6 \leq X \leq 4,7)$.
5. Zmienna losowa X podlega rozkładowi według trójkąta utworzonego przez oś Ox oraz proste $y = ax + a$ i $y = -x + 4$. Dobrać odpowiednio stałą a i podać gęstość prawdopodobieństwa tej zmiennej.
6. Zmienna losowa podlega rozkładowi według trójkąta utworzonego przez oś Ox oraz proste $y = ax$ ($a > 0$) i $y = -2a^2x + 4\sqrt{5}$. Dobrać odpowiednio stałą a i podać gęstość prawdopodobieństwa tej zmiennej.