

II. PEWNE SCHEMATY RACHUNKU PRAWDOPODOBIENSTWA

2.1. Zagadnienie Bernoulliego

Przeprowadzamy n doświadczeń w taki sposób, że prawdopodobieństwo sukcesu w każdym doświadczeniu jest stałe, niezależne od wyników poprzednich i równe p . Jest to tzw. *schemat (zagadnienie) Bernoulliego*.

Twierdzenie 2.1. (Bernoulliego) *Prawdopodobieństwo, że na n przeprowadzonych doświadczeń wg schematu Bernoulliego uzyska się k sukcesów w dowolnej kolejności jest dane wzorem*

$$P_{n,k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k},$$

gdzie $0 < p < 1$ i $q = 1 - p$.

Dowód. Oznaczmy:

U – zdarzenie polegające na udaniu się doświadczenia,

$\bar{U}$ – zdarzenie przeciwne.

Prawdopodobieństwo, że na n doświadczeń uda się k pierwszych i nie uda się $n - k$ następnych jest równe

$$P = P(\underbrace{U \cdot U \cdot \dots \cdot U}_k \cdot \underbrace{\bar{U} \cdot \bar{U} \cdot \dots \cdot \bar{U}}_{n-k}).$$

Ponieważ zdarzenia są niezależne, więc

$$P = \underbrace{P(U) \cdot P(U) \cdot \dots \cdot P(U)}_k \cdot \underbrace{P(\bar{U}) \cdot P(\bar{U}) \cdot \dots \cdot P(\bar{U})}_{n-k}.$$

Kolejność występowania udanych doświadczeń jest obojętna, więc każdy układ k udanych oraz $n - k$ nieudanych doświadczeń jest sprzyjający zdarzeniu, którego prawdopodobieństwo obliczamy. Wszystkich różnych układów k elementów U i $n - k$ elementów $\bar{U}$ jest tyle, ile jest permutacji z powtórzeniami.

Przypomnienie: n -elementową permutacją z powtórzeniami nazywamy zbiór składający się z n elementów uporządkowanych, wśród których pewne elementy powtarzają się odpowiednio $n_1, n_2, \dots, n_k$ razy; liczba utworzonych w ten sposób zbiorów jest równa

$$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

W naszym przypadku mamy

$$P_n^{k, n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Prawdopodobieństwo każdego układu jest równe $p^k \cdot q^{n-k}$ i stąd mamy wzór podany w twierdzeniu. ■

Schemat Bernoulliego ma prostą interpretację urnową, która polega na tzw. losowaniu kul ze zwracaniem.

Przykład 2.1. W urnie mamy N kul, wśród których jest M Białych i $N - M$ czarnych. Losujemy n razy po jednej kuli, zwracając ją za każdym razem. Obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania k kul białych.

Prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli jest stałe przy każdym losowaniu i wynosi $p = M / N$. Zatem

$$P_{n,k} = \binom{n}{k} \left(\frac{M}{N}\right)^k \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-k}.$$

Przykład 2.2. Co jest bardziej prawdopodobne u zawodnika rozgrywającego partię z przeciwnikiem o równej sile gry:

- a) wygranie 3 partii z 4, czy 5 z 8,
- b) wygranie nie mniej niż 3 partii z 4, czy nie mniej niż 5 z 8,
- c) wygranie nie więcej niż n z $2n$ partii, czy więcej niż n z $2n$,
- d) wygranie nie więcej niż n z $2n + 1$ partii, czy więcej niż n z $2n + 1$?

Z założenia prawdopodobieństwo wygrania p jest równe prawdopodobieństwu przegrania q i wynosi $1/2$. Rozegranie partii można uważać za przeprowadzenie doświadczenia. Wynik jednej partii nie wpływa na wynik innej, co oznacza, że doświadczenia są niezależne.

Ad. a)

Należy obliczyć $P_{4,3}$ oraz $P_{8,5}$ i porównać te wielkości. Mamy

$$P_{4,3} = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \quad P_{8,5} = \binom{8}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{32},$$

a więc $P_{4,3} > P_{8,5}$.

Ad. b)

Prawdopodobieństwo wygrania nie mniej niż 3 partii z 4 jest równe prawdopodobieństwu wygrania 3 partii z 4 lub 4 partii z 4, czyli

$$P(4, 3 \leq k \leq 4, \frac{1}{2}) = P_{4,3} + P_{4,4} = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} + \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{5}{16}.$$

W drugim przypadku mamy

$$P(8, 5 \leq k \leq 8, \frac{1}{2}) = P_{8,5} + P_{8,6} + P_{8,7} + P_{8,8} = \frac{93}{256}.$$

Zatem bardziej prawdopodobne jest wygranie nie mniej niż 5 partii z 8.

Ad. c)

Mamy

$$\begin{aligned}
 P(2n, 0 \leq k \leq n, \frac{1}{2}) &= \sum_{k=0}^n P_{2n,k} = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k} \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \cdot \sum_{k=0}^n \binom{2n}{k}
 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
 P(2n, n+1 \leq k \leq 2n, \frac{1}{2}) &= \sum_{k=1}^n P_{2n,n+k} = \sum_{k=1}^n \binom{2n}{n+k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \cdot \sum_{k=1}^n \binom{2n}{n+k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \cdot \sum_{k=1}^n \binom{2n}{n-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k},
 \end{aligned}$$

gdyż

$$\binom{2n}{n+k} = \binom{2n}{n-k}$$

oraz

$$\sum_{k=1}^n \binom{2n}{n-k} = \binom{2n}{n-1} + \binom{2n}{n-2} + \dots + \binom{2n}{0} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k}.$$

Porównując oba wyniki widzimy, że

$$P(2n, 0 \leq k \leq n, \frac{1}{2}) > P(2n, n+1 \leq k \leq 2n, \frac{1}{2}).$$

Ad. d)

Mamy

$$\begin{aligned}
 P(2n+1, 0 \leq k \leq n, \frac{1}{2}) &= \sum_{k=0}^n P_{2n+1,k} = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1-k} \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \cdot \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k}
 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
 P(2n+1, n+1 \leq k \leq 2n, \frac{1}{2}) &= \sum_{k=1}^n P_{2n+1,n+k} = \sum_{k=1}^n \binom{2n+1}{n+k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1-n-k} \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \cdot \sum_{k=1}^n \binom{2n+1}{n+k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \cdot \sum_{k=1}^n \binom{2n+1}{n-k} \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \cdot \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k}
 \end{aligned}$$

i mamy równość.

Zadania

1. Obliczyć prawdopodobieństwo, że na 7 rzutów kostką co najwyżej 3 razy wypadnie liczba oczek nie mniejsza od 4.
2. Rzucamy cztery razy dwiema kostkami. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dwa razy otrzymamy sumę oczek nie większą od trzech?
3. Dana jest urna, w której są kule: 6 czarnych i 9 białych. Losujemy 5 razy po jednej kuli, kładąc za każdym razem wyciągniętą kulę z powrotem do urny. Jakie jest prawdopodobieństwo, że otrzymamy co najwyżej 3 razy kulę białą?
4. Mamy 2 urny typu A_1 zawierające po 3 białe i 7 czarnych kul, 3 urny typu A_2 zawierające po 2 białe, 3 czarne i 5 zielonych kul oraz 5 urn typu A_3 , w każdej z których znajduje się 1 biała i 9 czarnych kul. Pobieramy losowo 3 kule ze zwrotem, tzn. po każdym losowaniu zwracamy ją do urny, z której została wyciągnięta. Obliczyć prawdopodobieństwo, że co najwyżej jedna kula będzie czarna.
5. W urnie są 4 kule białe i 6 kul czarnych. Losujemy 4 razy po 5 kul i po każdym losowaniu wrzucamy je do urny. Jakie jest prawdopodobieństwo, że 2 razy wylosujemy 5 takich kul, wśród których będą 3 kule czarne?

2.2. Maksymalne prawdopodobieństwo w zagadnieniu Bernoulliego

Definicja 2.1. Ustalony wskaźnik k_0 , dla którego prawdopodobieństwo P_{n, k_0} jest nie mniejsze od pozostałych prawdopodobieństw nazywamy *najbardziej prawdopodobną liczbą sukcesów w serii n doświadczeń*.

Aby znaleźć tę liczbę, rozpatrzmy ciąg prawdopodobieństw $P_{n, k}$, w którym przy ustalonej wartości n będziemy zmieniać wartość k . Utwórzmy iloraz

$$\frac{P_{n, k}}{P_{n, k-1}} = \frac{\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}{\binom{n}{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-k+1}} = \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{p}{1-p}.$$

Mamy

- a) $\frac{P_{n, k}}{P_{n, k-1}} > 1$, tj. $P_{n, k} > P_{n, k-1}$, gdy $k < (n+1)p$,
- b) $\frac{P_{n, k}}{P_{n, k-1}} < 1$, tj. $P_{n, k} < P_{n, k-1}$, gdy $k > (n+1)p$,
- c) $\frac{P_{n, k}}{P_{n, k-1}} = 1$, tj. $P_{n, k} = P_{n, k-1}$, gdy $k = (n+1)p$.

Zgodnie z definicją 2.1 należy ustalić wskaźnik k_0 , dla którego

$$P_{n, k_0-1} \leq P_{n, k_0} \quad \text{ i } \quad P_{n, k_0+1} \leq P_{n, k_0}.$$

Na podstawie a) i c) pierwsza nierówność jest spełniona, gdy

$$k_0 \leq (n+1)p,$$

a druga (na podstawie b) i c)), gdy

$$k_0 \geq (n+1)p - 1$$

(w tym przypadku w podanych wzorach należy podstawić $k = k_0 + 1$). Wartość k_0 spełnia zatem podwójną nierówność:

$$(n+1)p - 1 \leq k_0 \leq (n+1)p.$$

Różnica liczb $(n+1)p - 1$ i $(n+1)p$ wynosi 1. Wynika stąd, że

a) jeśli liczby te nie są całkowite, to $k_0 = [(n+1)p]$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x ,

b) gdy obie liczby są całkowite, to istnieją dwie liczby najbardziej prawdopodobnych sukcesów:

$$k_0' = (n+1)p - 1 \quad \text{ i } \quad k_0'' = (n+1)p.$$

Przykład 2.3. Mamy 4 urny typu A_1 zawierające 2 białe i 8 czarnych kul oraz 6 urn typu A_2 z 3 kulami białymi i 7 czarnymi. Losujemy cztery razy po jednej kuli ze zwracaniem. Obliczyć najbardziej prawdopodobną liczbę kul białych.

Oznaczmy przez B zdarzenie polegające na wylosowaniu białej kuli, a przez p prawdopodobieństwo otrzymania białej kuli przy jednym losowaniu. Mamy

$$\begin{aligned} p &= P(A_1 \cdot B + A_2 \cdot B) = P(A_1 \cdot B) + P(A_2 \cdot B) \\ &= P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) \\ &= 0,4 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,3 = 0,26. \end{aligned}$$

Ponieważ $n = 4$, więc $(n+1)p = 5 \cdot 0,26 = 1,30$, czyli najbardziej prawdopodobną liczbą białych kul wśród czterech pobranych jest jedna kula.

Przykład 2.4. Rzucono 77 razy kostką do gry. Jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba wyrzuconych szóstek?

Prawdopodobieństwo p wyrzucenia szóstki w jednym rzucie wynosi $1/6$. Ponieważ wartość

$$(n+1)p = 78 \cdot \frac{1}{6} = 13$$

jest liczbą całkowitą, więc najbardziej prawdopodobne liczby wyrzucenia szóstek to 12 i 13.

Zadanie

Działo nr 1 w ciągu określonego czasu wyrzuca 70 pocisków z prawdopodobieństwem trafienia do celu równym 0,8 dla każdego strzału, a działo nr 2 w ciągu tego samego czasu wyrzuca 60 pocisków z prawdopodobieństwem trafienia do celu równym 0,9 dla każdego strzału. Dla którego z tych dział najbardziej prawdopodobna liczba celnych strzałów jest większa?

2.3. Zagadnienie Poissona

Twierdzenie 2.2. *Jeżeli przeprowadzamy ciąg S_n serii doświadczeń według schematu Bernoulliego, tak że liczba doświadczeń n w poszczególnych seriach wzrasta dążąc do nieskończoności i prawdopodobieństwo p dąży do zera, ale iloczyn $n \cdot p$ jest wielkością stałą, skończoną, równą $\lambda > 0$, to*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,k} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = P(k, \lambda).$$

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned} P_{n,k} &= \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \frac{1}{k!} \cdot (n-k+1) \cdot (n-k+2) \cdot \dots \cdot n \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{k-2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{0}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}. \end{aligned}$$

Ale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{k-2}{n}\right) \cdot \dots \cdot 1 = 1$$

(bo liczba czynników jest skończona i równa k) oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = e^{-\lambda} \cdot 1 = e^{-\lambda},$$

skąd wynika teza. ■

Wzór podany w twierdzeniu 2.2 pozwala obliczyć prawdopodobieństwo $P_{n,k}$ według przybliżonego wzoru

$$P_{n,k} \approx \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!},$$

gdy liczba doświadczeń jest duża, a prawdopodobieństwo p jest tak małe, że iloczyn $n \cdot p$ jest liczbą małą (w praktyce $n \geq 100$, a $\lambda \leq 20$).

Zadania

1. Mamy 3 maszyny typu A , 5 maszyn typu B i 2 maszyny typu C . Każda z nich produkuje tę samą liczbę towarów i dla typu A mamy: 50% wyrobów I gatunku, 45% wyrobów II gatunku, resztę stanowią braki; dla typu B : 80% wyrobów I gatunku, 17% wyrobów II gatunku, resztę stanowią braki; dla typu C : 30% wyrobów I gatunku, 69% wyrobów II gatunku i 1% braków. Pobieramy losowo z całej przemieszanej masy towarowej 200 sztuk ze zwracaniem. Obliczyć prawdopodobieństwo, że co najwyżej jedna sztuka będzie brakiem.
2. Tekst zadania – zob. zad. 1. Pobieramy losowo 300 sztuk. Obliczyć najbardziej prawdopodobną liczbę sztuk wadliwych oraz prawdopodobieństwo wystąpienia tej liczby.

3. Szufladę o polu powierzchni równym 1 m^2 podzielono na przegródki o polach podstaw równych 1 cm^2 . Do szuflady tej wrzucono losowo 1000 kulek, przy czym zakładamy, że prawdopodobieństwo wypadnięcia kulki do przegródki jest dla każdej przegródki jednakowe. Obliczyć prawdopodobieństwo, że do wyróżnionej przegródki wpadną więcej niż dwie kulki.

2.4. Zagadnienie Pascala

Zagadnienie Pascala jest trochę zmodyfikowanym zagadnieniem Bernoulliego. W zagadnieniu Bernoulliego liczba doświadczeń n jest z góry ustalona i wyznacza się prawdopodobieństwo, że wśród tej ustalonej liczby będzie k sukcesów. W zagadnieniu Pascala należy obliczyć prawdopodobieństwo, że liczba doświadczeń według schematu Bernoulliego będzie równa n przy założeniu, że próby przeprowadzamy tak długo, aż osiągniemy k sukcesów.

Twierdzenie 2.3. *Jeżeli doświadczenia przeprowadzamy według schematu Bernoulliego o stałym prawdopodobieństwie sukcesu w każdym doświadczeniu równym p , aż do uzyskania z góry ustalonej liczby k sukcesów ($k \geq 1$), to prawdopodobieństwo, że liczba doświadczeń będzie równa n ($n \geq k$) jest równe*

$$P_{k,n} = \binom{n-1}{k-1} \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad n \geq k \geq 1, \quad q = 1 - p.$$

Dowód. Oznaczmy przez E zdarzenie polegające na tym, że liczba doświadczeń będzie równa n , jeśli będziemy wykonywać je tak długo, aż osiągniemy k sukcesów, przez E_1 zdarzenie polegające na otrzymaniu $k-1$ sukcesów w $n-1$ doświadczeniach (w dowolnej kolejności), a przez E_2 zdarzenie polegające na otrzymaniu sukcesu w n -tym doświadczeniu. Zauważmy, że

$$E = E_1 \cdot E_2$$

oraz że zdarzenia E_1 i E_2 są niezależne. Zatem

$$P(E) = P(E_1) \cdot P(E_2).$$

Ponieważ $P(E_2) = p$, a na podstawie twierdzenia 2.1 mamy

$$P(E_1) = \binom{n-1}{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot q^{n-k},$$

więc stąd wynika podany wzór. ■

W szczególnym przypadku, gdy doświadczenie przeprowadzamy tylko do chwili uzyskania pierwszego sukcesu ($k = 1$), podany wzór przyjmuje prostszą postać

$$P_{1,n} = p \cdot q^{n-1}.$$

Przykład 2.5. Gracz wykonuje rzuty monetą tak długo, aż otrzyma orła. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia E , że liczba rzutów nie przekroczy czterech. Mamy $p = 1/2$ i $q = 1/2$ oraz

$$P(E) = P_{1,1} + P_{1,2} + P_{1,3} + P_{1,4} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{15}{16},$$

gdzie $P_{1,k}$ oznacza sukces w k -tym rzucie.

Zadanie

Trzy fabryki A , B i C produkują towar sztukowy tak, że fabryka A pokrywa 30% zapotrzebowania rynku, fabryka B – 50% oraz fabryka C – 20%. Jakość towaru produkowanego przez poszczególne fabryki jest następująca:

w fabryce A – 80% I gatunku, 18% II gatunku, 2% braków,

w fabryce B – 40% I gatunku, 55% II gatunku, 5% braków,

w fabryce C – 80% I gatunku, 15% II gatunku i 5% braków.

Kupujemy na rynku w sposób losowy po jednej sztuce tak długo, aż otrzymamy dwie sztuki I gatunku. Obliczyć prawdopodobieństwo, że zostanie zakupionych 5 sztuk.

2.5. Zagadnienie Pólya

Zagadnienie to jest związane z pewną metodą losowania kul z urny.

Z urny, w której znajduje się b białych i c czarnych kul ($b + c = N$) losujemy kulę i następnie zwracamy ją do urny oraz wykonujemy jedną z następujących czynności:

- dodajemy s kul tego samego koloru, co pobrana uprzednio kula ($s > 0$),
- wyjmujemy z urny s kul tego koloru, co pobrana uprzednio kula ($s < 0$),
- nie dokładamy, ani nie wyjmujemy kul ($s = 0$).

Zagadnienie Pólya polega na obliczeniu prawdopodobieństwa, że w przypadku n losowań według tego schematu otrzymamy k kul białych (przypadek c) jest schematem Bernoulliego – schematem losowania kul z urny ze zwrotem).

Twierdzenie 2.4. Prawdopodobieństwo uzyskania k sukcesów na n przeprowadzonych doświadczeń według schematu Pólya jest równe

$$P(n, k) = \binom{n}{k} \cdot \frac{p \cdot (p + \alpha) \cdot \dots \cdot (p + (k-1)\alpha) \cdot q \cdot (q + \alpha) \cdot \dots \cdot (q + (n-k-1)\alpha)}{(1 + \alpha) \cdot (1 + 2\alpha) \cdot \dots \cdot (1 + (n-1)\alpha)},$$

$$\text{gdzie } p = \frac{b}{N}, \quad q = \frac{c}{N}, \quad \alpha = \frac{s}{N}.$$

Dowód. Oznaczmy:

B_i – zdarzenie polegające na wylosowaniu białej kuli za i -tym razem,

C_i – zdarzenie polegające na wylosowaniu czarnej kuli za i -tym razem,

E – wylosowanie kolejno k białych, a następnie $n - k$ czarnych kul, czyli

$$E = B_1 \cdot B_2 \cdot \dots \cdot B_k \cdot C_{k+1} \cdot C_{k+2} \cdot \dots \cdot C_n.$$

Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia E jest równe

$$P(E) = P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) \cdot \dots \cdot P(B_k|B_1 \cdot B_2 \cdot \dots \cdot B_{k-1}) \\ \cdot P(C_{k+1}|B_1 \cdot B_2 \cdot \dots \cdot B_k) \cdot \dots \cdot P(C_n|B_1 \cdot \dots \cdot B_k \cdot C_{k+1} \cdot \dots \cdot C_{n-1}) =$$

$$= \frac{b}{N} \cdot \frac{b+s}{N+s} \cdot \dots \cdot \frac{b+(k-1)s}{N+(k-1)s} \cdot \frac{c}{N+ks} \cdot \frac{c+s}{N+(k+1)s} \cdot \dots \cdot \frac{c+(n-k-1)s}{N+(n-1)s}.$$

Wszystkich możliwych ustawień k białych i $n-k$ czarnych kul jest $\binom{n}{k}$ (jest to liczba n elementowych permutacji, w których jeden element powtarza się k razy, a drugi $n-k$ razy). Zatem

$$\begin{aligned} P(n, k) &= \binom{n}{k} \cdot P(E) \\ &= \binom{n}{k} \cdot \frac{b \cdot (b+s) \cdot \dots \cdot (b+(k-1)s) \cdot c \cdot (c+s) \cdot \dots \cdot (c+(n-k-1)s)}{N \cdot (N+s) \cdot \dots \cdot (N+(n-1)s)}. \end{aligned}$$

Dzieląc licznik i mianownik przez N^n otrzymujemy wzór podany w twierdzeniu. ■

W szczególnym przypadku losowania bez zwrotu ($s = -1$) mamy

Twierdzenie 2.5. *Prawdopodobieństwo uzyskania k sukcesów na n przeprowadzonych doświadczeń przy losowaniu bez zwrotu dane jest wzorem*

$$P_1(n, k) = \frac{\binom{b}{k} \cdot \binom{c}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

przy czym $\max(0, n - N + b) \leq k \leq \min(n, b)$.

Dowód. Podstawiając $s = -1$ we wzorze podanym w poprzednim twierdzeniu, otrzymujemy

$$\begin{aligned} P_1(n, k) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{b \cdot (b-1) \cdot \dots \cdot (b-k+1) \cdot c \cdot (c-1) \cdot \dots \cdot (c-n+k+1)}{N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot (N-n+1)} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{b!}{(b-k)!} \cdot \frac{c!}{(c-n+k)!} \cdot \frac{(N-n)!}{N!} \\ &= \frac{b!}{k!(b-k)!} \cdot \frac{c!}{(n-k)!(c-n+k)!} \cdot \frac{1}{\frac{N!}{(N-n)!n!}} = \frac{\binom{b}{k} \cdot \binom{c}{n-k}}{\binom{N}{n}}. \end{aligned}$$

Ograniczenia wynikają z warunków, że liczba wylosowanych kul białych i czarnych nie może przekroczyć liczby kul danego koloru w urnie, czyli

$$k \leq b, \quad n-k \leq N-b \quad \Rightarrow \quad k \geq n-N+b,$$

a ponadto jest oczywiste, że $0 \leq k \leq n$. ■

Przykład 2.6. Z urny zawierającej 7 kul białych i 3 czarne losujemy kolejno trzy razy, zwracając po każdym losowaniu kulę wraz z dwiema kulami wylosowanej uprzednio kuli. Obliczyć prawdopodobieństwo, że dokładnie dwa razy wylosujemy kulę białą.

Mamy: $n = 3$, $k = 2$, $b = 7$, $c = 3$, $s = 2$, czyli

$$P(3, 2) = \binom{3}{2} \cdot \frac{7 \cdot (7+2) \cdot 3}{10 \cdot (10+2) \cdot (10+4)} = \frac{27}{80}.$$

Twierdzenie 2.6. *Jeżeli przy ustalonych wartościach n i k mamy*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{s}{N} = 0 \text{ i } 0 < \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b}{N} = p < 1,$$

to

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(n, k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

Dowód. Wzór ten wynika bezpośrednio z poprzedniego twierdzenia. ■

Z powyższego twierdzenia wynika ważny praktycznie wzór:

$$P(n, k) \approx \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \text{ gdzie } 0 < p = \frac{b}{N} < 1.$$

Wzór ten stosujemy, gdy wartości N , b i c są liczbami dostatecznie dużymi w porównaniu z wartościami n , k i $n-k$. Jeżeli dodatkowo liczba n jest bardzo duża, a wartość $n \cdot p$ bardzo mała, to możemy zastosować wzór przybliżony z zagadnienia Poissona:

$$P(n, k) \approx \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \text{ gdzie } \lambda = n \cdot p \text{ i } p = \frac{b}{N}.$$

Przykład 2.7. Z partii towaru o liczności $N = 200$ elementów, w tym $b = 120$ elementów mających cechę X , losujemy $n = 12$ elementów bez zwrotu. Obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania dokładnie $k = 7$ elementów z cechą X stosując

- wzór dokładny,
- wzór przybliżony.

Ad. a)

Po żmudnych rachunkach otrzymujemy $P_1(12, 7) \approx 0,234$.

Ad. b)

Mamy $p = b / N = 120/200 = 0,6 < 1$ i z przybliżonego wzoru dostajemy

$$P_1(12, 7) \approx \binom{12}{7} \cdot (0,6)^7 \cdot (0,4)^5 \approx 0,227.$$

Widzimy, że otrzymane wyniki różnią się niewiele.

Zadanie

W urnie znajduje się 25 kul białych i 45 kul czarnych. Losujemy 20 razy według schematu Pólya dodając po każdym losowaniu 2 kule odpowiedniego koloru. Obliczyć prawdopodobieństwo, że otrzymamy 7 razy kulę białą.

2.6. Zagadnienie Bayesa

Dany jest układ zupełny zdarzeń $A_1, A_2, \dots, A_n$ oraz zdarzenie B określone w tej samej przestrzeni I . Wiemy, że zdarzenie B zaszło. Interesuje nas prawdopodobieństwo zdarzenia A_k ($k = 1, 2, \dots, n$) obliczone na podstawie otrzymanej już informacji o zajściu zdarzenia B , tj. $P(A_k | B)$. Zagadnienie to nazywa się *zagadnieniem Bayesa*, w którym zdarzenia A_k nazywa się *przyczynami*, a zdarzenie B – *skutkiem*.

Znajomość prawdopodobieństw $P(A_k)$ i $P(B | A_k)$ pozwala nam określić prawdopodobieństwo $P(A_k | B)$. Mamy

$$P(B \cdot A_k) = P(B) \cdot P(A_k | B) = P(A_k) \cdot P(B | A_k) = P(A_k \cdot B),$$

skąd

$$P(A_k | B) = \frac{P(A_k) \cdot P(B | A_k)}{P(B)}.$$

Zdarzenia $A_1, A_2, \dots, A_n$ stanowią jednak układ zupełny zdarzeń, tj.

$$P(B) = P(A_1 \cdot B + A_2 \cdot B + \dots + A_n \cdot B),$$

więc ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite mamy

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B | A_i).$$

Zatem ostatecznie

$$P(A_k | B) = \frac{P(A_k) \cdot P(B | A_k)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B | A_i)}.$$

Wzór ten nosi nazwę *wzoru na prawdopodobieństwo a posteriori*, tzn. prawdopodobieństwo przyczyny. Często jest też nazywany wzorem Bayesa.

Przykład 2.8. Dane są dwie urny z kulami: urna A_1 , która zawiera 6 czarnych i 9 białych kul oraz urna A_2 z 5 czarnymi i 15 białymi kulami. Wylosowano kulę białą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pochodzi ona z urny A_1 ?

Znany jest fakt wyciągnięcia kuli białej. Pytamy o prawdopodobieństwo, że jest ona z urny A_1 . Ze wzoru Bayesa mamy

$$P(A_1 | B) = \frac{P(A_1) \cdot P(B | A_1)}{P(A_1) \cdot P(B | A_1) + P(A_2) \cdot P(B | A_2)},$$

gdzie przez B oznaczyliśmy zdarzenie polegające na wyciągnięciu kuli białej. Ponieważ

$$P(A_1) = \frac{1}{2}, \quad P(A_2) = \frac{1}{2}, \quad P(B | A_1) = \frac{9}{15}, \quad P(B | A_2) = \frac{15}{20},$$

więc

$$P(A_1|B) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{15}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{15} + \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{20}} = \frac{4}{9}.$$

Zadania

1. Mamy 2 urny typu A_1 zawierające po 3 białe i 7 czarnych kul, 3 urny typu A_2 zawierające po 2 białe, 3 czarne i 5 zielonych kul oraz 5 urn typu A_3 , w każdej z których znajduje się 1 biała i 9 czarnych kul. Wyciągnięto kulę, która okazała się białą. Jakiemu typowi urny odpowiada największe prawdopodobieństwo pochodzenia tej kuli i jaka jest jego wartość liczbową.
2. W pewnym mieście są trzy lotniska A_1 , A_2 i A_3 , posiadające samoloty sanitarne. Prawdopodobieństwo, że jest do dyspozycji samolot na lotnisku A_1 jest równe $1/5$, że na lotnisku A_2 równe $2/5$, a na lotnisku A_3 równe $4/5$. Prawdopodobieństwo otrzymania połączenia telefonicznego z lotniskiem A_1 za pierwszym wybraniem numeru jest równe $3/5$, z lotniskiem A_2 równa się $1/5$, a z lotniskiem A_3 równa się $1/5$. Uzyskano samolot sanitarny po pierwszym wezwaniu telefonicznym. Z którego lotniska najprawdopodobniej uzyskano samolot?
3. W urnie znajduje się 5 kul, przy czym każda z nich może być czarna lub biała. Losując 4 razy po jednej kuli ze zwrotem wylosowaliśmy jedną kulę białą i trzy czarne. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w urnie znajduje się jedna kula biała i cztery czarne?

Zadania dotyczące różnych schematów prawdopodobieństwa

1. Mamy 3 urny typu A_1 , 2 urny typu A_2 i 5 urn typu A_3 . Każda z urn typu A_1 zawiera 1 białą i 9 zielonych kul, każda urna typu A_2 zawiera 3 białe, 6 zielonych i 1 czarną kulę, a w każdej urnie typu A_3 znajduje się 7 kul białych, 1 zielona i 2 czarne.
 - A. Obliczyć prawdopodobieństwo, że pobrana losowo kula okaże się zielona.
 - B. Losujemy po jednej kuli z każdego typu urny. Obliczyć prawdopodobieństwo, że
 - i) kule te będą różnych kolorów,
 - ii) kule będą tego samego koloru,
 - iii) dokładnie dwie kule będą tego samego koloru,
 - iv) co najmniej dwie kule będą tego samego koloru,
 - v) dwie kule będą białe,
 - vi) co najmniej jedna kula będzie biała.
 - C. Losujemy trzy razy po jednej kuli za każdym razem zwracając ją. Obliczyć:
 - i) najbardziej prawdopodobną liczbę kul białych wśród kul wylosowanych i prawdopodobieństwo wylosowania tej liczby kul,
 - ii) prawdopodobieństwo, że co najwyżej jedna kula będzie czarna.
 - D. Wylosowano jedną kulę, która okazała się zielona. Obliczyć prawdopodobieństwo, że pochodzi ona z urny typu A_1 .
 - E. Co najmniej ile kul należy pobrać losowo, aby z prawdopodobieństwem nie mniejszym od 0,9 można było twierdzić, że nie wszystkie kule są tego samego koloru?
 - F. Losujemy dwukrotnie po jednej kuli za każdym razem zwracając ją. Obliczyć prawdopodobieństwo, że obie kule będą pochodziły z urny typu A_1 i obie będą zielone.

- G. Losujemy urnę, a potem kolejno dwie kule uprzednio wylosowanej urny. Obliczyć prawdopodobieństwo, że
- będą one różnych kolorów,
 - obie będą białe.
- H. Obliczyć prawdopodobieństwo, e jeśli losujemy kule ze zwracaniem tak długo, aż otrzymamy dwie kule białe, to liczba losowań będzie równa trzy.
2. Na pewnym kierunku studiów skład grup studenckich jest następujący: w grupie I jest 14 studentek i 11 studentów, w grupie II jest 12 studentek i 12 studentów, a w grupie III jest 17 studentek i 5 studentów.
- A. Z listy zawierającej alfabetyczny spis całego roku wybrano losowo jedną osobę, która okazała się studentką. Obliczyć prawdopodobieństwo, e wybrana studentka należy do grupy III.
- B. Z trzech list, po jednej dla każdej grupy, losowano jedną osobę, która okazała się studentką. Obliczyć prawdopodobieństwo, że należy ona do grupy III.
3. Urządzenie składa się z trzech zespołów typu *A*, trzech zespołów typu *B* oraz czterech zespołów typu *C*. Urządzenie przestaje działać, jeśli działają mniej niż dwa zespoły danego typu. Prawdopodobieństwo zepsucia się zespołu danego typu w pewnym określonym czasie jest równe odpowiednio $P(A) = 0,1$, $P(B) = 0,1$ i $P(C) = 0,2$.
- A. Obliczyć prawdopodobieństwo, że urządzenie przestanie w danym czasie działać.
- B. Urządzenie przestało działać. Obliczyć prawdopodobieństwo, że zdarzenie zaszło z powodu awarii zespołów typu *C*.
4. Z talii 52 kart losujemy po kolei 5 kart ze zwracaniem karty po każdym losowaniu.
- A. Obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania jednego pika, dwóch trefli, jednej karty karo i jednego kiera.
- B. Obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kart jednego koloru i po jednej karcie pozostałych kolorów.