

Zadania

1. Dany odcinek podzielić dwoma punktami na trzy części. Jakie jest prawdopodobieństwo, że z tych części da się zbudować trójkąt?
2. Monetę o promieniu r rzucono na parkiet utworzony z przystających kwadratów o boku $2a$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że moneta przykryje częściowo przynajmniej dwa kwadrat, jeśli $r < a$.
3. W kwadrat wpisano trójkąt tak, że podstawa trójkąta jest podstawą kwadratu, a trzeci wierzchołek dzieli przeciwległy bok kwadratu na połowy. W trójkąt ten wpisano koło. We wnętrzu kwadratu pojawia się losowo punkt M . Zakładając, że prawdopodobieństwo pojawienia się punktu M w dowolnym obszarze należącym do kwadratu zależy jedynie od miary tego obszaru, obliczyć prawdopodobieństwo, że
 - a) punkt pojawi się w kole,
 - b) punkt pojawi się w kole przy założeniu, że pojawił się w trójkącie.
4. Na stół podzielony na równe prostokątne trójkąty równoramienne o ramionach a pada moneta o promieniu r . Obliczyć prawdopodobieństwo, że moneta nie przetnie żadnego boku trójkąta. Podać warunek na promień r .

1.5. Prawdopodobieństwo warunkowe

Czasami zdarza się, że informacja o zajściu zdarzenia B ma wpływ na wartość obliczanego prawdopodobieństwa zdarzenia A .

Przykład 1.9. Rzucamy dwiema kostkami. Obliczyć prawdopodobieństwo:

- a) zdarzenia A polegającego na otrzymaniu sumy oczek nie większej od czterech,
- b) zdarzenia B polegającego na otrzymaniu dwóch oczek co najmniej na jednej kostce,
- c) zdarzenia polegającego na tym, że co najmniej na jednej z kostek otrzymamy dwa oczka i że suma oczek będzie nie większa od czterech,
- d) zdarzenia polegającego na tym, że suma oczek otrzymanych na obu kostkach będzie nie większa od czterech, jeśli na jednej kostce otrzymano dwa oczka.

Ad. a)

Zbiór podstawowy I zdarzeń elementarnych przy rzucie dwiema kostkami jest następujący (36 zdarzeń):

(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1),
(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2),
(1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 3), (6, 3),
(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (5, 4), (6, 4),
(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5),
(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6).

Zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A jest 6:

(1, 1), (2, 1), (3, 1),
(1, 2), (2, 2),

(1, 3).

Z klasycznej definicji prawdopodobieństwa mamy $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Ad. b)

Zdarzeń sprzyjających zdarzeniu B jest 11:

(1, 2), (2, 1), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2),
 (2, 2),
 (2, 3),
 (2, 4),
 (2, 5),
 (2, 6).

Zatem $P(B) = \frac{11}{36}$.

Ad. c)

Zdarzenie, którego prawdopodobieństwo chcemy obliczyć polega na łącznym zajściu zdarzeń A i B . Są 3 zdarzenia sprzyjające temu zdarzeniu:

(1, 2), (2, 1),
 (2, 2).

Zatem $P(A \cdot B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

Ad. d)

W tym przypadku zbiorem podstawowym jest zbiór tych par liczb – zdarzeń elementarnych zbioru I , które zawierają co najmniej jedną dwójkę. Mamy 11 takich par:

(1, 2), (2, 1), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2),
 (2, 2),
 (2, 3),
 (2, 4),
 (2, 5),
 (2, 6).

Sprzyjające są te pary liczb, których suma jest nie większa od czterech. Są trzy takie pary:

(1, 2), (2, 1),
 (2, 2).

Szukane prawdopodobieństwo jest zatem równe $\frac{3}{11}$.

Zdarzenie polegające na zajściu zdarzenia A , przy założeniu, że zaszło zdarzenie B oznaczamy symbolem $A|B$, a prawdopodobieństwo tego zdarzenia $P(A|B)$ nazywamy *prawdopodobieństwem warunkowym*.

Dla zad. d) z przykładu 1.9 możemy napisać $P(A|B) = \frac{3}{11}$.

Niech n oznacza licznosc podstawowego zbioru zdarzeń elementarnych, wśród których jest k zdarzeń sprzyjających zajściu zdarzenia B oraz l zdarzeń sprzyjających zajściu zdarzenia $A \cdot B$. Mamy

$$P(A \cdot B) = \frac{l}{n}, \quad P(B) = \frac{k}{n}, \quad P(A|B) = \frac{l}{k},$$

gdyż podstawowy zbiór zdarzeń dla zdarzenia $A|B$ ma k zdarzeń elementarnych (liczebność zbioru B). Stąd

$$P(A|B) = \frac{l}{k} = \frac{\frac{l}{n}}{\frac{k}{n}} = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}.$$

Powyższy wzór jest podstawą definicji prawdopodobieństwa w przypadku dowolnego zbioru zdarzeń elementarnych I .

Definicja 1.5. *Prawdopodobieństwem warunkowym $P(A|B)$ zdarzenia A przy założeniu, że zaszło zdarzenie B nazywamy iloraz prawdopodobieństwa łącznego zajścia zdarzeń A i B oraz prawdopodobieństwa zdarzenia B :*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0.$$

Wzór ten można też napisać w postaci

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A|B), \quad (*)$$

co czytamy: prawdopodobieństwo łącznego zajścia zdarzeń A i B jest równe iloczynowi prawdopodobieństwa zdarzenia B przez prawdopodobieństwo warunkowe zdarzenia A przy założeniu, że zaszło zdarzenie B .

Uogólnienie wzoru (*) na większą liczbę zdarzeń jest następujące:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cdot A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{n-1}).$$

Wynika to z kolejnego posługiwania się wzorem (*):

$$\begin{aligned} P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) &= P(A_1) \cdot P(A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_n|A_1) \\ &= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3 \cdot A_4 \cdot \dots \cdot A_n|A_2 \cdot A_1) \\ &= \dots = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cdot A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{n-1}). \end{aligned}$$

Przykład 1.10. Na każdej z pięciu kartek papieru napisano jedną z cyfr: 1, 2, 3, 4, 5. Pobieramy losowo i bez zwrotu trzy kartki. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że suma otrzymanych cyfr będzie liczbą parzystą.

Najpierw rozważmy to zadanie bez posługiwania się prawdopodobieństwem warunkowym. Zauważmy, że na parzystość sumy trzech cyfr nie ma wpływu kolejność składników. Ponieważ losowanie odbywa się bez zwracania, więc cyfry w danej sumie nie będą powtarzały się. Liczba wszystkich możliwych

zbiorów (trójek składników) jest równa $\binom{5}{3} = 10$. Liczba przypadków sprzyja-

jących jest równa liczbie sposobów wylosowania dwóch cyfr spośród cyfr nie-

parzystych i jednej spośród parzystych, czyli $\binom{3}{2} \cdot \binom{2}{1} = 6$. Stąd

$$P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Rozważmy teraz to zadanie w oparciu o prawdopodobieństwo warunkowe. Jedną kartkę z cyfrą parzystą może wystąpić albo w pierwszym, albo w drugim, albo w trzecim losowaniu. Oznaczmy przez A_k zdarzenie polegające na otrzymaniu cyfry parzystej w k -tym losowaniu ($k = 1, 2, 3$), a przez $\bar{A}_k$ – cyfry nieparzystej. Mamy

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\bar{A}_1 \text{ i } \bar{A}_2 \text{ i } A_3 \text{ albo } \bar{A}_1 \text{ i } A_2 \text{ i } \bar{A}_3 \text{ albo } A_1 \text{ i } \bar{A}_2 \text{ i } \bar{A}_3) \\ &= P(\bar{A}_1 \text{ i } \bar{A}_2 \text{ i } A_3) + P(\bar{A}_1 \text{ i } A_2 \text{ i } \bar{A}_3) + P(A_1 \text{ i } \bar{A}_2 \text{ i } \bar{A}_3) \\ &= P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1) \cdot P(A_3 | \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2) \\ &\quad + P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2 | \bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_3 | \bar{A}_1 \cdot A_2) \\ &\quad + P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2 | A_1) \cdot P(\bar{A}_3 | A_1 \cdot \bar{A}_2) = 3 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Definicja 1.6. Mówimy, że zdarzenie A jest *niezależne* od zdarzenia B , gdy zachodzi jeden z dwu przypadków:

- a) $P(A|B) = P(A)$ i $P(B) > 0$,
- b) $P(B) = 0$.

Jeżeli $P(A|B) > P(A)$, to mówimy, że zajście zdarzenia A *wpływa pozytywnie* na zajście zdarzenia A , natomiast gdy $P(A|B) < P(A)$, to mówimy, że zajście zdarzenia B ma *wpływ negatywny* na zajście zdarzenia A .

Przykład 1.11. W urnie znajdują się 3 kule białe i 4 kule czarne. Jakie jest prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia B polegającego na otrzymaniu dwóch kul białych, przy założeniu, że losujemy z urny dwa razy i po pierwszym losowaniu kula nie zostaje zwrócona do urny?

Oznaczmy:

B_1 – zdarzenie polegające na wylosowaniu kuli białej za pierwszym razem,

B_2 – kuli białej za drugim razem.

Zdarzenie B_2 jest zależne od zaistnienia zdarzenia B_1 . Zajście zdarzenia B_1 zmniejsza szansę zajścia zdarzenia B_2 , gdyż po wylosowaniu pierwszej kuli białej zmniejsza się liczba kul białych w urnie. Zajście zdarzenia B polega na łącznym zajściu zdarzeń B_1 i B_2 . Zatem

$$P(B) = P(B_1 \cdot B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2 | B_1) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{7}.$$

Twierdzenie 1.16. Jeżeli zdarzenie A jest niezależne od zdarzenia B , to zdarzenie B jest niezależne od zdarzenia A .

Dowód. Ze wzoru (*) mamy:

- a) $P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A|B)$, jeśli $P(B) > 0$,
- b) $P(B \cdot A) = P(A) \cdot P(B|A)$, jeśli $P(A) > 0$.

Na podstawie pierwszego przypadku w definicji 1.6 i a) mamy

- c) $P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A)$.

Z b) i c) wynika, że

$$P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A), \text{ bo } A \cdot B = B \cdot A.$$

Dzieląc tę równość przez $P(A) > 0$ otrzymujemy

$$P(B|A) = P(B),$$

co, zgodnie z definicją 1.6, świadczy o niezależności zdarzenia B od A . Jeśli natomiast mamy przypadek, że $P(A) = 0$, to niezależność zdarzenia B od zdarzenia A wynika natychmiast na podstawie drugiego przypadku w definicji 1.6. ■

Z twierdzenia 1.16 wynika, że własność niezależności zdarzeń jest symetryczna. Można zatem sformułować

Definicja 1.7. O zdarzeniach A i B mówimy, że są *wzajemnie niezależne*, gdy zachodzi jeden z dwu przypadków:

- a) $P(A) > 0$ i $P(B) > 0$ oraz $P(A|B) = P(A)$,
- b) $P(A) = 0$ lub $P(B) = 0$.

Ważne (z uwagi na zastosowania) jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.17. Na to, aby zdarzenia A i B były niezależne potrzeba i wystarcza, by

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Dowód. (warunek konieczny, tj. jeśli zdarzenia A i B są niezależne, to zachodzi podana równość) Na podstawie wzoru (*) mamy

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B).$$

Jeśli zdarzenia A i B są niezależne oraz $P(A) > 0$ i $P(B) > 0$, to na mocy definicji 1.7 mamy

$$P(B|A) = P(B) \text{ i } P(A|B) = P(A),$$

a zatem $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$. Gdy zdarzenia są niezależne wskutek faktu, że $P(A) = 0$ lub $P(B) = 0$, to ponieważ $A \cdot B \subseteq A$, z twierdzenia 1.11 otrzymujemy $P(A \cdot B) \leq P(A) = 0$, czyli $P(A \cdot B) = 0$. Gdy $P(A) = 0$, to korzystamy z faktu, że $A \cdot B \subseteq B$ i otrzymujemy ten sam wniosek.

(warunek wystarczający, tj. jeśli $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$, to zdarzenia A i B są niezależne)

Gdy $P(A) > 0$ i $P(B) > 0$, to z porównania wzoru

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

z wzorem (*) mamy

$$P(B|A) = P(B) \text{ i } P(A|B) = P(A),$$

co oznacza, że zdarzenia A i B są niezależne. Gdy równość

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

jest spełniona, bo obie jej strony są równe zeru, to $P(A) = 0$ lub $P(B) = 0$, a to oznacza (zob. definicja 1.7 p. b)), że zdarzenia A i B są niezależne. ■

Z pojęcia prawdopodobieństwa warunkowego korzysta się w twierdzeniu o tzw. *prawdopodobieństwie zupełnym (całkowitym)*.

Twierdzenie 1.18. Jeżeli zdarzenia $A_1, A_2, \dots, A_n$ tworzą układ zupełny zdarzeń, to prawdopo-

dobieństwo dowolnego zdarzenia B dane jest wzorem

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i).$$

Dowód. Niech B oznacza dowolne zdarzenie należące do algebry S utworzonej w przestrzeni I . Niech zdarzenia $A_1, A_2, \dots, A_n$ tworzą układ zupełny zdarzeń, tzn.

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = I,$$

przy czym $A_i \cdot A_j = 0$ dla $i \neq j$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$). Pomnożmy obie strony ww. równości przez B :

$$B \cdot (A_1 + A_2 + \dots + A_n) = B \cdot I.$$

Na podstawie aksjomatu X algebry mamy $B \cdot I = B$, a na podstawie aksjomatu IX mamy

$$B \cdot (A_1 + A_2 + \dots + A_n) = B \cdot A_1 + B \cdot A_2 + \dots + B \cdot A_n.$$

Zatem

$$A_1 \cdot B + A_2 \cdot B + \dots + A_n \cdot B = B.$$

Wzór ten oznacza, że zajście zdarzenia B jest równoważne zajściu tego zdarzenia z jednym ze zdarzeń $A_1, A_2, \dots, A_n$. Zdarzenia $A_1 \cdot B, A_2 \cdot B, \dots, A_n \cdot B$ wykluczają się parami, bo

$$(A_i \cdot B) \cdot (A_j \cdot B) = A_i \cdot A_j \cdot B = (A_i \cdot A_j) \cdot B = 0 \cdot B = 0$$

dla $i \neq j$. Stąd

$$P(B) = P(A_1 \cdot B) + P(A_2 \cdot B) + \dots + P(A_n \cdot B).$$

Ze wzoru (*) dla każdego $k = 1, 2, \dots, n$ mamy jednak

$$P(A_k \cdot B) = P(A_k) \cdot P(B|A_k),$$

skąd wynika teza twierdzenia. ■

Pojęcie układu zupełnego zdarzeń można rozszerzyć na przypadek algebry prawdopodobieństwa $[I, S, P.]$, gdzie zbiór I może być zbiorem o dowolnej liczbie elementów.

Definicja 1.8. Mówimy, że ciąg zdarzeń A_i ($i = 1, 2, \dots$) należących do algebry S tworzy *układ zupełny w szerszym sensie*, jeżeli zdarzenia te wykluczają się parami, tj.

$$A_i \cdot A_j = 0 \text{ dla } i \neq j \text{ } (i, j = 1, 2, \dots)$$

oraz

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1.$$

Uwaga: Różnica między tą definicją i definicją ze skończoną liczbą zdarzeń jest taka, że nie wymaga się, aby

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = I,$$

tzn. może być tak, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = I^* \subset I,$$

byle tylko

$$P(\overline{I^*}) = 0.$$

Znaczenie zagadnienia zależności zdarzeń jest ważne dla tzw. *łańcuchów Markowa* (A. A. Markow, 1856 – 1922, matematyk rosyjski). Przypuśćmy, że przeprowadzamy serię kolejnych doświadczeń i że są określone prawdopodobieństwa, że w pierwszym doświadczeniu, zwanym również *krokiem*, pojawią się zdarzenia $A_1, A_2, \dots, A_s$ stanowiące układ zupełny zdarzeń (zdarzenia $A_1, A_2, \dots, A_s$ nazywa się też *stanami*). Niech prawdopodobieństwa pojawienia się zdarzeń w drugim kroku zależą od tego jakie zdarzenie zaistniało w pierwszym kroku itd.. Tego rodzaju łańcuch kolejno realizowanych zależnych doświadczeń nazywa się *skokowym łańcuchem Markowa*.

Łańcuch Markowa nazywa się *prostym*, jeśli prawdopodobieństwa przyjęcia przez układ różnych stanów w każdym kolejnym kroku zależy tylko od stanu, który ten układ przyjął w poprzednim doświadczeniu i nie zależy od wszystkich stanów, które zaszły wcześniej.

Przykład 1.12. Załóżmy, że przeprowadzamy serię kolejnych doświadczeń tak, że w wyniku każdego z nich może zajść zdarzenie A lub zdarzenie przeciwne $\bar{A}$. Oznaczmy te zdarzenia w n -tym doświadczeniu przez A_n i $\bar{A}_n$, a prawdopodobieństwa ich zajścia przez p_n i q_n , tzn.

$$p_n = P(A_n), \quad q_n = P(\bar{A}_n) = 1 - p_n.$$

Niech w przypadku zajścia zdarzenia A w n -tym doświadczeniu prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A w $(n+1)$ -szym doświadczeniu równa się a . W przypadku, gdy zdarzenie A nie zajdzie w n -tym doświadczeniu, to niech prawdopodobieństwo jego zajścia w $(n+1)$ -szym doświadczeniu wynosi b , tj.

$$P(A_{n+1}|A_n) = a \quad \text{i} \quad P(A_{n+1}|\bar{A}_n) = b.$$

Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo p_n zajścia zdarzenia A w n -tym doświadczeniu znając p_1 , a i b .

Zdarzenie A_{n+1} realizuje się łącznie z jednym z dwóch zdarzeń wykluczających się A_n i $\bar{A}_n$, tj.

$$A_{n+1} = A_n \cdot A_{n+1} + \bar{A}_n \cdot A_{n+1}.$$

Na mocy twierdzenia 1.18 mamy

$$P(A_{n+1}) = P(A_n) \cdot P(A_{n+1}|A_n) + P(\bar{A}_n) \cdot P(A_{n+1}|\bar{A}_n).$$

Korzystając z przyjętych oznaczeń możemy napisać

$$p_{n+1} = p_n \cdot a + q_n \cdot b = p_n \cdot a + (1 - p_n) \cdot b = p_n \cdot (a - b) + b.$$

Napiszmy ten wzór dla $n = 1, 2, 3, \dots$. Mamy

$$\begin{aligned}
p_2 &= p_1 \cdot (a-b) + b \\
&= p_1 \cdot (a-b) + b \cdot \frac{1-a+b}{1-a+b} \\
&= p_1 \cdot (a-b) + \frac{b}{1-a+b} - \frac{b \cdot (a-b)}{1-a+b} \\
&= \left(p_1 - \frac{b}{1-a+b} \right) \cdot (a-b) + \frac{b}{1-a+b}, \\
p_3 &= p_2 \cdot (a-b) + b \\
&= \left[\left(p_1 - \frac{b}{1-a+b} \right) \cdot (a-b) + \frac{b}{1-a+b} \right] \cdot (a-b) + b \\
&= \left(p_1 - \frac{b}{1-a+b} \right) \cdot (a-b)^2 + \frac{b}{1-a+b}.
\end{aligned}$$

Założmy, że

$$p_n = \left(p_1 - \frac{b}{1-a+b} \right) \cdot (a-b)^{n-1} + \frac{b}{1-a+b}.$$

Pokażemy, że

$$p_{n+1} = \left(p_1 - \frac{b}{1-a+b} \right) \cdot (a-b)^n + \frac{b}{1-a+b}.$$

Mamy

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= p_n \cdot (a-b) + b \\
&= \left(p_1 - \frac{b}{1-a+b} \right) \cdot (a-b)^n + \frac{a \cdot b - b^2 + b - a \cdot b + b^2}{1-a+b},
\end{aligned}$$

co po redukcji kończy dowód.

Uzyskany tu ciąg prawdopodobieństw jest najprostszym przypadkiem łańcucha Markowa (bo w każdym kroku zachodzą tylko dwa zdarzenia). Po przejściu do granicy, gdy $n \rightarrow \infty$, mamy

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{b}{1-a+b}.$$

Zauważmy, że wartość p nie zależy od prawdopodobieństwa p_1 .

Przykład 1.13. (praktyczny) Niech prawdopodobieństwo, że po wyjeździe z domu napotkamy na pierwszym skrzyżowaniu zielony sygnał świetlny będzie równe 0,5. Sygnalizacja jest tak ustawiona, że w przypadku zatrzymania się na dowolnym skrzyżowaniu przy świetle czerwonym prawdopodobieństwo tego, że na następnym skrzyżowaniu zastaniemy światło zielone jest równe 0,95, a prawdopodobieństwo tego, że jeśli na dowolnym skrzyżowaniu będziemy mieli światło zielone, to na następnym też będzie zielone wynosi 0,3.

a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że po wyjeździe z garażu na trzecim skrzyżowaniu będzie światło zielone.

b) Obliczyć prawdopodobieństwo graniczne.

Ad. a)

Na podstawie wzoru z poprzedniego przykładu mamy

$$\begin{aligned} p_3 &= \left(p_1 - \frac{b}{1-a+b} \right) \cdot (a-b)^2 + \frac{b}{1-a+b} \\ &= \left(0,5 - \frac{0,95}{1-0,3+0,95} \right) \cdot (0,3-0,95)^2 + \frac{0,95}{1-0,3+0,95} \approx 0,608. \end{aligned}$$

Ad. b)

$$p = \frac{b}{1-a+b} = \frac{0,95}{1-0,3+0,95} \approx 0,576.$$

Zadania

- (porównaj zadanie 3 po punkcie 1.2) Mamy dwie urny z kulami: urnę I zawierającą 6 kul białych i 3 kule czarne oraz urnę II, w której znajdują się 4 kule białe i 6 kul czarnych. Zakładając, że po każdym losowaniu nie zwracamy kuli, obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania
 - dwóch kul białych, jeśli losujemy z urny I,
 - dwóch kul czarnych, jeśli losujemy z urny I,
 - trzech kul białych, jeśli losujemy z urny II,
 - trzech kul czarnych, jeśli losujemy z urny II,
 - dwóch białych i jednej czarnej, jeśli losujemy trzy kule z urny I,
 - dwóch kul – jednej białej i jednej czarnej, jeżeli losujemy po jednej kuli z każdej urny,
 - dwóch kul – jednej białej i jednej czarnej, jeżeli losujemy tylko z jednej urny, lecz nie wiadomo z której,
 - trzech kul – jednej białej i dwóch czarnych, jeżeli losujemy z urny I,
 - trzech kul – jednej białej i dwóch czarnych, jeżeli losujemy z jednej urny, ale nie wiadomo z której.
- W każdej z pięciu urn pierwszej serii znajdują się 4 kule białe i 6 czarnych, a w każdej z ośmiu urn drugiej serii znajduje się 9 kul białych i 7 czarnych. Sięgamy losowo do jednej z urn serii i wyciągamy jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyciągnięta kula będzie biała?
- W każdej z dwu urn typu A_1 znajdują się 2 kule białe i 8 czarnych, w każdej z siedmiu urn typu A_2 znajduje się 6 kul białych i 4 czarne, a w jednej urnie typu A_3 znajduje się 9 kul białych i 1 kula czarna.
 - Sięgamy losowo do jednej z urn jednego z typów i wyciągamy jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wyciągniemy białą kulę.
 - Pobrano losowo 3 kule ze zwracaniem. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że co najmniej jedna kula będzie czarna.
 - Ile razy należy losować kulę ze zwracaniem, aby z prawdopodobieństwem 0,95 można było twierdzić, że nie otrzymamy wszystkich kul białych?
- Z talii 52 kart wylosowano kartę i nie oglądając jej wsunęto do drugiej takiej samej talii kart,

- po czym karty potasowano. Z powiększonej o jedną kartę talii wylosowano znów jedną kartę i, nie oglądając jej, włożono do trzeciej talii 52 kart, tasując ją potem. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania damy z trzeciego zbioru kart?
5. Z talii 52 kart losujemy dwie karty bez zwrotu. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania asa pozostałych 50 kart, jeżeli nie wiadomo, jakie karty zostały uprzednio wyciągnięte?
 6. Mamy trzy maszyny typu A , pięć maszyn typu B i dwie maszyny typu C . Każda z nich produkuje tę samą ilość towaru i dla typu A mamy: 50% wyrobów I gatunku, 45% wyrobów II gatunku, resztę stanowią braki; dla typu B : 80% wyrobów I gatunku, 17% wyrobów II gatunku, resztę stanowią braki; dla typu C : 30% wyrobów I gatunku, 69% wyrobów II gatunku i 1% braków.
 - A. Pobieramy losowo po jednej sztuce z każdego typu maszyn. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że dwie sztuki będą pierwszego, a jedna drugiego gatunku.
 - B. Pobieramy losowo 3 sztuki ze zwrotem. Obliczyć prawdopodobieństwo, że dwie sztuki będą drugiego gatunku.
 7. Rzucono trzy kości do gry. Jeżeli na żadnej z nich nie wypadnie ta sama liczba oczek, to jakie jest prawdopodobieństwo, że przynajmniej na jednej z nich wypadnie jedno oczko?
 8. Z urny, w której jest b kul białych i c kul czarnych wyjęto jedną kulę i nie oglądając jej wrzucano do drugiej urny, w której jest b_1 białych i c_1 czarnych kul. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej z drugiej urny?
 9. W skrzyni mamy 8 szpul nici białych, 5 czarnych 4 zielonych. Obliczyć prawdopodobieństwo, że przy trzykrotnym losowaniu otrzymamy dokładnie dwie szpule nici tego samego koloru, jeśli losowanie odbywa się ze zwracaniem.
 10. Dwaj zawodnicy A i B grają w warcaby. Umówiono się, że pierwszy ruch w każdej rozgrywce należy do zwycięzcy. W każdej grze szansa wygrania wynosi $k/(k+1)$ na korzyść tego, który ma pierwszy ruch. Obliczyć prawdopodobieństwo, że gracz A wygra w n -tej rozgrywce.