

Andrzej Marciniak

METODY PROBABILISTYCZNE

**Wykłady dla studentów kierunku *informatyka*
Politechniki Poznańskiej**

Wykłady są przeznaczone wyłącznie do indywidualnego użytku przez studentów *informatyki* Politechniki Poznańskiej. Nie mogą być one powielane i rozpowszechniane ani w całości, ani we fragmentach za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących, nagrywających i innych, w tym również nie mogą być umieszczane ani rozpowszechniane w postaci cyfrowej zarówno w Internecie, jak i w sieciach lokalnych.

I. POJĘCIE I PEWNE WŁASNOŚCI PRAWDOPODOBIENSTWA

1.1. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa pochodzi od Pierre-Somona Laplace'a (1749 – 1827), matematyka, fizyka i astronoma francuskiego i została sformułowana w 1812 roku.

W definicji tej zakłada się, że dana jest skończona przestrzeń zdarzeń elementarnych i definiowane jest prawdopodobieństwo zdarzenia za pomocą zdarzeń jednakowo możliwych, które przyjmuje się za podstawowe, nie podlegające określeniu. Stwarza to trudność praktyczną w ustaleniu, czy rozważane zdarzenia elementarne są jednakowo możliwe. Ograniczenie to powoduje, że definicja znajduje zastosowanie w wąskiej dziedzinie – do rozwiązywania zadań związanych z grami różnego rodzaju, na przykład przy rzucie kostką do gry.

Niech I oznacza zbiór podstawowy zdarzeń elementarnych $A_1, A_2, \dots, A_n$ jednakowo możliwych. Określmy zbiór S składający się ze zdarzenia niemożliwego O , wszystkich zdarzeń A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) zbioru I oraz wszystkich zdarzeń A , które mogą być utworzone ze zdarzeń elementarnych A_i zbioru I . Zbiór S zawiera 2^n wszystkich takich zdarzeń.

Jeśli, na przykład, zbiór I składa się z trzech zdarzeń elementarnych A_1, A_2 i A_3 , to zbiór S składa się z $2^3 = 8$ zdarzeń:

$$O, A_1, A_2, A_3, A_1 + A_2, A_1 + A_3, A_2 + A_3, A_1 + A_2 + A_3 = I.$$

Zbiór S jest ciałem (algebrą) zdarzeń, gdyż należą do niego: zdarzenie niemożliwe O , zdarzenie pewne $I = A_1 + A_2 + \dots + A_n$ oraz suma, różnica i iloczyn zdarzeń ze zbioru S .

W ciele S każdemu zdarzeniu A przyporządkowujemy liczbę $P(A) = p$ zwaną prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia A zgodnie z poniższą definicją.

Definicja 1.1. Jeżeli zbiór podstawowy składa się z n zdarzeń elementarnych jednakowo możliwych i jeżeli wśród nich jest k zdarzeń sprzyjających zajściu zdarzenia A , to liczbę

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

nazywamy *prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia A* .

Prawdopodobieństwo $P(A)$ można uważać za funkcję zdarzenia A określoną na dziedzinie S .

Przykład 1.1. Sięgamy do urny, w której jest jednakowa liczba kul białych i czarnych. Jest równie możliwe (jednakowo prawdopodobne), że wylosujemy kulę czarną, jak białą. Jeśli jednak w urnie znajdują się białe kule drewniane i czarne żelazne, a losowanie odbywa się za pomocą magnesu, to sytuacja jest inna: kule białe nie mają

żadnych szans wylosowania, natomiast wylosowanie każdej z kul czarnych jest jednakowo prawdopodobne.

Przykład 1.2. Ile trzeba wydać złotych, aby być pewnym, wygrania „szóstki” w dużym lotku?

Zbiór zdarzeń elementarnych składa się z $\binom{49}{6}$ zdarzeń. Jest tylko jedno zdarzenie sprzyjające. Zatem

$$P(\text{szóstka}) = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{\frac{49!}{43! \cdot 6!}} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49} \approx 7,15 \cdot 10^{-8}.$$

Trzeba „obstawić” wszystkie możliwości, a więc $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$. Jeżeli jeden zakład kosztuje 3 złote, to trzeba wydać 41 951 448 złotych.

Przykład 1.3. Rzucamy dwiema kostkami. Niech zdarzenie A polega na tym, że suma oczek jest liczbą nieparzystą, a zdarzenie B – na otrzymaniu jedynki co najmniej na jednej kostce. Opisać zdarzenia $A \cdot B$, $A + B$, $A \cdot \bar{B}$ (kres u góry oznacza zdarzenie przeciwne). Mamy

$A \cdot B$ – otrzymanie z obu kostek nieparzystej liczby oczek i otrzymanie jedynki wyłącznie na jednej kostce,

$A + B$ – suma oczek jest nieparzysta lub chociaż na jednej kostce pojawi się jedynka,

$A \cdot \bar{B}$ – suma oczek jest nieparzysta i wykluczenie jedynki na jakiejkolwiek kostce.

Zbiór podstawowy składa się z 36 jednakowo możliwych zdarzeń elementarnych:

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),
 (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),

 (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6).

Zbiór $A \cdot B$ składa się z następujących zdarzeń elementarnych:

(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (4, 1), (6, 1).

Z definicji mamy

$$P(A \cdot B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Zbiór $A + B$ składa się z 23 zdarzeń elementarnych:

- suma oczek jest nieparzysta (18 zdarzeń), tj.

(1, 2), (1, 4), (1, 6),
 (2, 1), (2, 3), (2, 5),
 (3, 2), (3, 4), (3, 6),
 (4, 1), (4, 3), (4, 5),
 (5, 2), (5, 4), (5, 6),

(6, 1), (6, 3), (6, 5),

- chociaż na jednej kostce pojawi się jedynka (11 zdarzeń), tj.

(1, 1), (1, 2), (1, 1), (1, 4), (1, 5), (1, 6),
(2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1),

przy czym zdarzenia podkreślone już wystąpiły w poprzednim przypadku, Zatem

$$P(A + B) = \frac{23}{36}.$$

Zauważmy, że $A \cdot B \subset A + B$ i $P(A \cdot B) < P(A + B)$.

Zbiór $A \cdot \bar{B}$ składa się z 12 zdarzeń elementarnych:

(2, 3), (2, 5),
 (3, 2), (3, 4), (3, 6),
 (4, 3), (4, 5),
 (5, 2), (5, 4), (5, 6),
 (6, 3), (6, 5)

i mamy

$$P(A \cdot \bar{B}) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

Zauważmy, że $A \cdot \bar{B} \subset A + B$ i $P(A \cdot \bar{B}) < P(A + B)$.

Zadania

- Rzucamy raz kostką do gry.. Niech zdarzenie A polega na wyrzuceniu parzystej liczby oczek, B – nieparzystej liczby oczek mniejszej od 3, C – wyrzuceniu jedynki, D – wyrzuceniu nieparzystej liczby oczek, E – wyrzuceniu liczby oczek mniejszej od 4, a F – wyrzuceniu liczby oczek większej od 1.
 - Wskazać pary zdarzeń wykluczających się.
 - Wskazać pary zdarzeń takich, że jedno zdarzenie jest zawarte w drugim i zapisać w postaci $X \subseteq Y$.
 - Które z wymienionych zdarzeń są przeciwne?
- Niech A, B, C oraz D oznaczają dowolne zdarzenia. Udowodnić, że
 - $(A + B + C) - C = A + B$,
 - $(A - A \cdot B) \cdot \bar{C} = A \cdot (\bar{B} + \bar{C})$,
 - $A \cdot B \subseteq A + B$,
 - $A \cdot B + C \cdot D = (\bar{A} + \bar{B}) \cdot (\bar{C} + \bar{D})$,
 - $(A + B) - (A + \bar{B}) = I$,
 - $(A + B) \cdot (A + \bar{B}) \cdot (\bar{A} + B) \cdot (\bar{A} + \bar{B}) = O$, $9A$
 - $(A + B) \cdot (A + C) \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$,
 - $A - B \cdot C = (A - B) + (A - C)$,
 - $A - (B + C) = (A - B) - C$,
 - $(A - B) + C = (A + C) - B + B \cdot C$,
 - $A + B + C = (A - B) + (B - C) + (C - A) + A \cdot B \cdot C$,

$$l) (A - B) - (C - D) = A - (B + C) + (A \cdot D - B),$$

$$m) A - (A - (B - (B - C))) = A \cdot B \cdot C.$$

1.2. Podstawowe własności prawdopodobieństwa

Twierdzenie 1.1. *Prawdopodobieństwo $P(A)$ zdarzenia pewnego jest równe 1.*

Dowód. Zbiór zdarzeń elementarnych, realizujących zdarzenie pewne, składa się z całej przestrzeni zdarzeń elementarnych.. Jeśli zdarzeń tych jest n , to

$$P(A) = \frac{n}{n} = 1.$$

Prawdziwe jest też twierdzenie odwrotne, czyli jeśli prawdopodobieństwo jakiegoś zdarzenia jest równe 1, to jest to zdarzenie pewne. ■

Twierdzenie 1.2. *Prawdopodobieństwo $P(A)$ zdarzenia niemożliwego równa się 0.*

Dowód. Żadne zdarzenie nie realizuje zdarzenia A , więc

$$P(A) = \frac{0}{n} = 0.$$

Prawdziwe jest też twierdzenie odwrotne, czyli jeśli prawdopodobieństwo jakiegoś zdarzenia jest równe 0, to jest ono niemożliwe. ■

Twierdzenie 1.3. *Prawdopodobieństwo $P(A)$ każdego zdarzenia spełnia nierówności*

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Dowód. Liczba zdarzeń sprzyjających spełnia nierówności

$$0 \leq k \leq n,$$

czyli

$$0 \leq \frac{k}{n} \leq 1,$$

skąd wynika teza twierdzenia. ■

Twierdzenie 1.4. *Jeżeli $A \subset B$, tzn. zajście zdarzenia A pociąga za sobą zajście zdarzenia B , to*

$$P(A) \leq P(B).$$

Dowód. Niech w zbiorze A będzie k zdarzeń elementarnych. Ponieważ $A \subset B$, więc zbiór B będzie miał $k + l$ zdarzeń elementarnych, gdzie $l = 1, 2, \dots, n - k$, a zatem

$$P(A) = \frac{k}{n} < \frac{k + l}{n} = P(B). \quad \blacksquare$$

Twierdzenie 1.5. *Jeżeli $A = B$, to $P(A) = P(B)$.*

Dowód. Ponieważ $A = B$, więc zbiory A i B składają się z tych samych zdarzeń elementarnych. Gdy jest ich k , to

$$P(A) = \frac{k}{n} = P(B).$$

■

Uwaga: Twierdzenia odwrotne do 1.4 i 1.5 nie są prawdziwe.

Przykład 1.4. Niech zdarzenie A polega na wyrzuceniu jednego oczka przy rzucie kostką, a zdarzenie B – na wyrzuceniu orła przy rzucie monetą. Mamy

$$P(A) = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{1}{2},$$

czyli $P(A) < P(B)$, ale zajście zdarzenia A nie pociąga za sobą zajścia zdarzenia B (zdarzenie A nie ma żadnego związku ze zdarzeniem B).

Przykład 1.5. W worku są kule malowane jednym i dwom kolorami: 4 kule białe i 4 kule niebiesko-zielone. Oznaczmy:

E_n – zdarzenie polegające na otrzymaniu koloru niebieskiego,

E_z – zdarzenie polegające na otrzymaniu koloru zielonego,

E_b – zdarzenie polegające na otrzymaniu koloru białego.

Zdarzenia E_z i E_n są równoważne, bo zajście zdarzenia E_z pociąga za sobą zajście zdarzenia E_n i na odwrót. Mamy

$$P(E_x) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \quad P(E_n) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \quad P(E_b) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$$

czyli

$$P(E_z) = P(E_n) = P(E_b),$$

Ale zdarzenie E_b nie jest równoważne ani zdarzeniu E_n , ani E_z .

Twierdzenie 1.6. *Prawdopodobieństwo zdarzenia A polegające na zajściu jednego z dwu wykluczających się zdarzeń A_1 lub A_2 jest równe sumie tych prawdopodobieństw, tj.*

$$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2).$$

Dowód. Niech zbiór A_1 składa się z k_1 zdarzeń, a zbiór A_2 – z k_2 . Ponieważ zdarzenia A_1 i A_2 wykluczają się, więc ich zbiory nie mają elementów wspólnych, a zatem zbiór A składa się z $k_1 + k_2$ zdarzeń elementarnych, Stąd

$$P(A) = \frac{k_1 + k_2}{n} = \frac{k_1}{n} + \frac{k_2}{n} = P(A_1) + P(A_2).$$

■

Twierdzenie 1.7. *Prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na zajściu przynajmniej jednego ze zdarzeń A_1, A_2 równa się sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń zmniejszonej o prawdopodobieństwo łącznego ich zajścia, tj.*

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2).$$

Dowód. Niech zbiór A_1 składa się z k_1 zdarzeń, a zbiór A_2 z k_2 zdarzeń. Ponieważ zdarzenia A_1 i A_2 nie są zdarzeniami wykluczającymi się, więc wśród k_1 i k_2 zdarzeń istnieje $l \neq 0$ zdarzeń wspólnych, które powodują, że zajście zdarzenia $A_1 \cdot A_2$. Różnych zdarzeń powodujących zajście

zdarzenia A jest zatem $k_1 + k_2 - l$. Stąd

$$P(A) = \frac{k_1 + k_2 - l}{n} = \frac{k_1}{n} + \frac{k_2}{n} - \frac{l}{n} = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2).$$

Przykład 1.6. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że korzystając z talii 52 kart i wyciągając jedną kartę otrzymamy pika lub asa.

Oznaczmy:

A_1 – zdarzenie polegające na otrzymaniu pika,

A_2 – zdarzenie polegające na otrzymaniu asa,

A – zajście przynajmniej jednego z tych zdarzeń.

Zdarzenie $A_1 \cdot A_2$ polega na otrzymaniu asa pik. Mamy

$$P(A_1) = \frac{13}{52}, \quad P(A_2) = \frac{4}{52}, \quad P(A_1 \cdot A_2) = \frac{1}{52}.$$

Zatem

$$P(A) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}.$$

Twierdzenie 1.8. Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia $\bar{A}$ przeciwnego zdarzeniu A wynosi

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Dowód. Ponieważ zdarzenia A i $\bar{A}$ tworzą układ zupełny zdarzeń, więc

$$P(\bar{A} + A) = 1.$$

Są to zdarzenia rozłączne a zatem

$$P(\bar{A} + A) = P(\bar{A}) + P(A),$$

skąd wynika podany wzór. ■

Zadania

- Dokonujemy trzech rzutów monetą. Obliczyć prawdopodobieństwo
 - dwukrotnego,
 - co najmniej dwukrotnego,
 - co najwyżej dwukrotnegopojawienia się orła.
- Wybieramy jedną z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, a następnie z pozostałych cyfr – drugą. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że
 - za pierwszym razem,
 - za drugim razem,
 - obydwa razybędzie wybrana nieparzysta cyfra.

3. Mamy dwie urny z kulami: urnę I zawierającą 6 kul białych i 3 kule czarne oraz urnę II, w której znajdują się 4 kule białe i 6 kul czarnych. Zakładając, że po każdym losowaniu kulę zwracamy, obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania
 - a) dwóch kul białych, jeśli losujemy z urny I,
 - b) dwóch kul czarnych, jeśli losujemy z urny I,
 - c) trzech kul białych, jeśli losujemy z urny II,
 - d) trzech kul czarnych, jeśli losujemy z urny II,
 - e) dwóch białych i jednej czarnej, jeśli losujemy trzy kule z urny I,
 - f) dwóch kul – jednej białej i jednej czarnej, jeżeli losujemy po jednej kuli z każdej urny,
 - g) dwóch kul – jednej białej i jednej czarnej, jeżeli losujemy tylko z jednej urny, lecz nie wiadomo z której,
 - h) trzech kul – jednej białej i dwóch czarnych, jeżeli losujemy z urny I,
 - i) trzech kul – jednej białej i dwóch czarnych, jeżeli losujemy z jednej urny, ale nie wiadomo z której.
4. W urnie znajdują się kartki oznaczone liczbami 12, 13, 14, 15, 18, 25, 30. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wylosujemy liczbę podzielną przez 3 lub 5.
5. Z urny, w której jest 7 kul białych i 3 kule czarne, losujemy trzy razy, zwracając kulę za każdym razem. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wszystkie wylosowane kule będą czarne.
6. Z urny, w której znajduje się 20 kul białych i 2 kule czarne losujemy n kul. Znaleźć najmniejszą liczbę losowa n taką, przy której prawdopodobieństwo wylosowania chociaż raz czarnej kuli jest większe od 0,5 zakładając, że po każdym losowaniu kulę kładzie się z powrotem do urny.
7. Z talii 52 kart losujemy 7 kart bez zwracania. Obliczyć prawdopodobieństwo, że
 - a) dokładnie trzy karty będą pikami,
 - b) co najmniej dwie kart będą kierami,
 - c) co najwyżej pięć kart będzie treflami,
 - d) dwie karty będą kierami, trzy – treflami, jedna – karo i jedna – pik.
8. Pobieramy losowo dwie karty z talii 52 kart. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jedna karta będzie koloru czerwonego, a druga czarnego?
9. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród trzech napisanych losowo cyfr otrzymamy
 - a) dwa powtórzenia,
 - b) jedno powtórzenie,
 - c) zero powtórzeń,
10. Rzucamy monetą tak długo, dopóki dwa razy pod rząd nie upadnie ona jedną i tą samą stroną. Obliczyć prawdopodobieństwo
 - a) zdarzenia A polegającego na tym, że doświadczenie zakończy się co najwyżej po n rzutach,
 - b) zdarzenia B polegającego na tym, że doświadczenie zakończy się po parzystej liczbie rzutów.

1.3. Algebra prawdopodobieństwa

Przyjmijmy, że zbiór podstawowy I zdarzeń elementarnych może być nieskończony. W takim przypadku nie można uzasadnić podanych własności prawdopodobieństwa w przedstawiony wcześniej sposób. Niektóre z nich trzeba przyjąć jako aksjomaty, a inne udowodnić drogą dedukcyjną. Podejście takie zostało zaproponowane przez A. N. Kołmogorowa w 1933 roku.

U podstaw teorii prawdopodobieństwa Kołmogorowa są dwa założenia:

- dany jest niepusty zbiór I zdarzeń elementarnych, skończony lub nieskończony, zwany *przestrzenią zdarzeń elementarnych*,
- w przestrzeni I jest określona borelowska algebra zdarzeń S .

Definicja (algebry borelowskiej). Niech będzie dany zbiór I dowolnych elementów. Z elementów tych tworzymy zbiory $A_1, A_2, \dots, A_n$. Zbiór utworzony z tych zbiorów oznaczmy przez R . Zbiór R nazywamy *algebrą* lub *ciałem* i oznaczamy przez S , jeśli w zbiorze tym są wykonywalne działania dodawania, mnożenia i dopełnienia spełniające aksjomaty Boole'a:

- I. $A + B = B + A$ (przemienność sumy),
- II. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (łączność sumy),
- III. $A + O = A$ (O – zbiór pusty równy $\bar{I}$),
- IV. $A + A = A$ (tautologia sumy),
- V. $A \cdot B = B \cdot A$ (przemienność iloczynu),
- VI. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ (łączność iloczynu),
- VII. $A \cdot O = O$,
- VIII. $A \cdot (A + B) = A$ (absorpcja),
- IX. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (rozdzielność mnożenia względem dodawania),
- X. $A \cdot I = A$,
- XI. $A + \bar{A} = I$,
- XII. $A \cdot \bar{A} = O$.

Założenia $A_i \in R, A_j \in R (i, j = 1, 2, \dots, n)$ pociągają przy tym za sobą warunki:

1. $\bar{A_i} + A_j \in R$,
2. $\bar{A_i} \in R$,
3. $I \in R$.

Gdy uzupełnimy definicję algebry w ten sposób, że zakładając przynależność do zbioru R zbiorów $A_i (i = 1, 2, \dots)$ Będziemy postulować przynależność do tego zbioru także sumy nieskończonej

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i \in R,$$

to algebrę taką będziemy nazywać *algebrą borelowską* (lub σ -*algebrą*).

Podstawowe własności prawdopodobieństwa dla nieskończonego zbioru zdarzeń ustalają **aksjomaty Kołmogorowa**:

I. Każdemu zdarzeniu A należącemu do algebry borelowskiej S jest przyporządkowana w sposób jednoznaczny liczba nieujemna $P(A)$ zwana *prawdopodobieństwem zdarzenia A* .

II. Prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego równa się jedności, tj.

$$P(I) = 1.$$

III. Jeżeli zdarzenia $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ wykluczają się parami, to prawdopodobieństwo alternatywy tych zdarzeń jest równe sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń, tj.

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + \dots$$

Definicja 1.2. Borelowską algebrę zdarzeń S w przestrzeni I , na której została określona dla każdego zdarzenia $A \in S$ funkcja $P(A)$ spełniająca aksjomaty I – III, nazywamy *algebrą prawdopodobieństwa* i oznaczamy symbolem $[I, S, P.]$.

Korzystając z podanych założeń i aksjomatów I – III można udowodnić niżej podane twierdzenia.

Twierdzenie 1.9. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Dowód. Zdarzenia A i $\bar{A}$ tworzą układ zupełny zdarzeń, tj. $A + \bar{A} = I$. Z aksjomatów II i III mamy

$$P(A) + P(\bar{A}) = P(A + \bar{A}) = P(I) = 1,$$

skąd wynika teza twierdzenia. ■

Twierdzenie 1.10. $P(O) = 0$.

Dowód. $O = \bar{I} \Rightarrow P(O) = P(\bar{I}) = 1 - P(I) = 1 - 1 = 0$. ■

Uwaga: W przypadku nieskończonego zbioru podstawowego I z założenia $P(A) = 1$ nie wynika, że zdarzenie A jest zdarzeniem pewnym, podobnie jak z faktu, że $P(A) = 0$ nie wynika, że zdarzenie A jest zdarzeniem niemożliwym.

Twierdzenie 1.11. Jeśli $A \subseteq B$, to $P(A) \leq P(B)$.

Dowód. Gdy $A = B$, to $P(A) = P(B)$ na mocy aksjomatu I. Jeśli $A \subset B$, to $B = A + C$, gdzie $C = B \cdot \bar{A}$, a tym samym $A \cdot C = 0$, co oznacza, że zdarzenia A i C są wykluczające się. Wówczas na mocy aksjomatu III mamy

$$P(B) = P(A) + P(C)$$

i ponieważ $P(C) \geq 0$ (aksjomat I), więc $P(B) \geq P(A)$. ■

Twierdzenie 1.12. Dla dowolnego zdarzenia A zachodzi

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Dowód. Dowolne zdarzenie $A \in S$ spełnia warunek

$$O \subseteq A \subseteq I.$$

Z twierdzenia 1.11 wynika, że $P(A) \leq P(I)$ i na mocy aksjomatu II mamy $P(A) \leq 1$. Z kolei z aksjomatu I mamy $0 \leq P(A)$. ■

Twierdzenie 1.13. $P(B - A) = P(B) - P(A \cdot B)$.

Dowód. Dla dowolnych zdarzeń A i B jest spełniona relacja

$$B = (B - A) + A \cdot B,$$

przy czym $(B - A) \cdot (A \cdot B) = O$. Korzystając z aksjomatu III otrzymujemy tezę twierdzenia. ■

W szczególności z twierdzenia 1.13 wynika

Twierdzenie 1.14. *Jeśli $A \subset B$, to $P(B - A) = P(B) - P(A)$.*

Dowód. Z założenia $B = A + (B - A)$, przy czym zdarzenia A i $B - A$ są wykluczające się. Zastosowanie aksjomatu III kończy dowód twierdzenia. ■

Twierdzenie 1.15. *Prawdopodobieństwo alternatywy dwóch zdarzeń jest dane wzorem*

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Dowód. Idea dowodu polega na przedstawieniu alternatywy dwóch zdarzeń A i B w postaci sumy dwóch wykluczających się zdarzeń, a następnie na zastosowaniu twierdzenia 1.13. Mamy

$$A + B = A + (B - A).$$

Stąd

$$P(A + B) = P(A) + P(B - A) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B). \quad \blacksquare$$

1.4. Prawdopodobieństwo geometryczne

Definicja 1.3. Niech będzie dana borelowska algebra zdarzeń S określona w przestrzeni I . Każdemu zdarzeniu A , będącemu elementem tej przestrzeni, przypisujemy w sposób jednoznaczny liczbę $m(A)$ zwaną *miarą zdarzenia*, jeśli spełnia ona następujące warunki:

- a) $m(A) \geq 0$,
- b) $m(O) = 0$,
- c) $m(A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots) = m(A_1) + m(A_2) + \dots + m(A_n) = \dots$, jeśli zdarzenia wykluczają się parami.

Definicja 1.4. *Prawdopodobieństwem geometrycznym zdarzenia A nazywamy liczbę*

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(I)}.$$

Jeśli zbiór I jest skończony i za miarę przyjmiemy jego liczebność, to definicja ta pokrywa się z definicją klasyczną. Podana definicja jest przydatna, gdy zbiór podstawowy nie jest ani skończony, ani przeliczalny.

Uwaga: Zmiana wyboru miary zdarzenia może spowodować zmianę wartości obliczonego prawdopodobieństwa. Wybór miary zależy od przyjętego sposobu losowania.

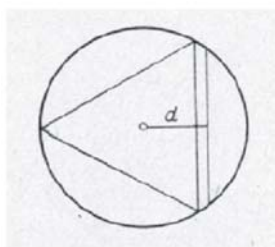
Przykład 1.7. (paradoks Bertranda – matematyk francuski, 1822 – 1900) Obliczyć prawdopodobieństwo p , że dowolnie obrana cięciwa koła o promieniu R będzie większa od boku trójkąta równobocznego wpisanego w to koło.

Zakładamy następujący sposób losowania: rzucamy koło na płaszczyznę, na której poprowadzona prosta równoległa w odległości równej średnicy koła. Odcinki prostych przecinających okrąg będą stanowiły cięciwy koła.

1. Niech d oznacza odległość cięciwy od środka koła o promieniu R . Mamy

$$0 \leq d \leq R$$

i możemy długość promienia R utożsamiać ze zbiorem możliwych wartości odległości cięciwy od środka, czyli przyjąć długość promienia jako miarę prawdopodobieństwa zbioru zdarzeń.



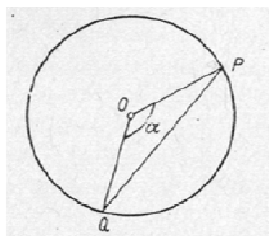
Zdarzenia sprzyjające otrzymamy, gdy

$$0 \leq d \leq \frac{1}{2}R,$$

bo podstawa trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg jest odległa o $R/2$ od środka okręgu. Za miarę zdarzeń sprzyjających przyjmiemy $R/2$. Mamy wówczas

$$p = \frac{\frac{1}{2}R}{R} = \frac{1}{2}.$$

2. Połączmy punkty wspólne cięciwy i okręgu z jego środkiem. Utworzony kąt środkowy oznaczmy przez α .



Mamy

$$0 \leq \alpha \leq \pi$$

(zbiór wszystkich możliwych wartości α). Zbiorem zdarzeń sprzyjających są te wartości α , dla których

$$\frac{2}{3}\pi \leq \alpha \leq \pi$$

(kąt środkowy oparty na boku trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg jest równy $2\pi/3$). Otrzymujemy

$$p = \frac{\pi - \frac{2}{3}\pi}{\pi} = \frac{1}{3}.$$

Mamy dwa różne wyniki, bo w każdym przypadku przyjęliśmy inne założenia. W pierwszym przypadku za jednakowo możliwe uznaliśmy wszystkie odległości cięciwy od środka koła, a w drugim – wszystkie wartości kąta α . Założenia te nie są równoważne.

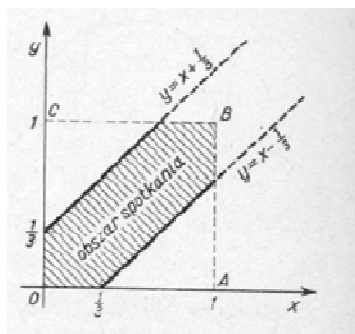
Przykład 1.8. Dwie osoby X i Y umówiły się na spotkanie w określonym miejscu między godziną 12 i 13 w ten sposób, że osoba, która przyjdzie pierwsza czeka 20 minut, po czym odchodzi. Obliczyć prawdopodobieństwo p , że osoby X i Y spotkają się, jeśli każda z nich przychodzi losowo w podanym przedziale czasowym i niezależnie od siebie.

Oznaczmy przez x czas odpowiadający chwili przybycia osoby X , a przez y – osoby Y . Aby osoby spotkały się potrzeba i wystarcza, by

$$|x - y| \leq \frac{1}{3}$$

(w godzinach), czyli

$$x - \frac{1}{3} \leq y \leq x + \frac{1}{3}.$$



Mamy

$$p = \frac{\text{pole obszaru zakresowanego}}{\text{pole kwadratu}} = \frac{1 - 2 \cdot \frac{2}{9}}{1} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$