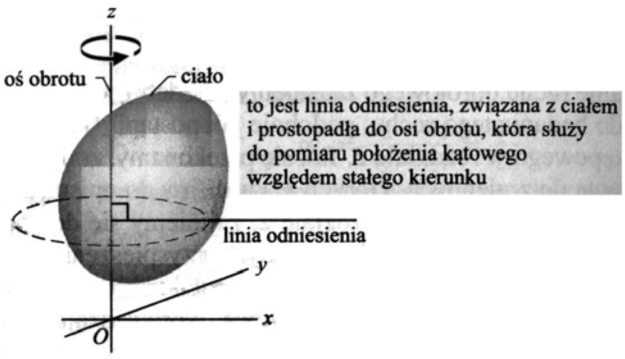
IX. OBROTY

9.1. Zmienne obrotowe

W celu opisania ruchu obrotowego ciała wokół ustalonej osi (zwanej *osią obrotu*) należy wybrać linię prostopadłą do osi obrotu, która jest związana z ciałem i która obraca się wraz z nim (zob. rys. 9.1). Położeniem kątowym ciała nazywamy kąt θ, jaki tworzy ta linia z pewnym stałym kierunkiem. Kąt ten, wyrażony w radianach, jest równy

$$\theta = \frac{s}{r},$$

gdzie s oznacza długość łuku okręgu o promieniu r odpowiadającą kątowi θ.



Rys. 9.1. Obrót ciała wokół osi *z*

Jeśli ciało obróci się wokół osi obrotu i jego położenie kątowe zmieni się z θ_1 na θ_2, to przemieszczenie kątowe ciała wyniesie

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 .$$

Przemieszczenie to jest dodatnie, gdy obrót zachodzi w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, a ujemne, gdy obrót zachodzi w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. Jeśli w przedziale czasu Δt przemieszczenie kątowe wynosi $\Delta\theta$, to średnia prędkość kątowa ciała ω_{sr} jest określone wzorem

$$\omega_{sr} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

Pochodną

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

nazywamy *prędkością kątową* (chwilową) ciała. Obie wielkości, $\omega_{\text{śr}}$ oraz ω, są wektorami, a ich kierunek jest wyznaczony przez regułę prawej dłoni. Są one dodatnie, gdy obrót zachodzi w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

Jeżeli w przedziale czasu $\Delta t = t_2 - t_1$ prędkość kątowa zmienia się z ω_1 na ω_2, to wielkość

$$\alpha_{sr} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

jest średnim przyspieszeniem kątowym ciała. *Przyspieszenie kątowe* (chwilowe) ciała jest równe

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}.$$

Wielkości $\alpha_{\text{śr}}$ i α są wektorami.

9.2. Obrót ze stałym przyspieszeniem kątowym

Ważnym przypadkiem szczególnym ruchu obrotowego jest ruch obrotowy ze stałym przyspieszeniem kątowym (α = const). Dla wielkości kątowych w tym ruchu obowiązują wówczas równania znane dla wielkości liniowych w ruchu ze stałym przyspieszeniem liniowym. Mamy

$$\begin{aligned}
&\omega = \omega_0 + \alpha t,\\
&\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2,\\
&\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0),\\
&\theta = \theta_0 + \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t,\\
&\theta = \theta_0 + \omega t - \frac{1}{2}\alpha t^2.
\end{aligned} \tag{9.1}$$

Przykład

Tarcza szlifierska obraca się ze stałym przyspieszeniem kątowym $\alpha = 0{,}35$ rad / s^2. W chwili początkowej $t = 0$ jej prędkość kątowa wynosi $\omega_0 = -4{,}6$ rad / s, a linia odniesienia jest pozioma, co odpowiada położeniu kątowemu $\theta_0 = 0$.

Po jakim czasie od chwili $t = 0$ linia odniesienia znajdzie się w położeniu θ odpowiadającym 5 pełnym obrotom?

Ruch tarczy odbywa się ze stałym przyspieszeniem, więc na podstawie drugiego z równań (9.1) mamy

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2,$$

bo $\theta_0 = 0$. Jedyną niewiadomą w tym równaniu jest szukany czas t. Podstawiając dane otrzymujemy ($\theta = 5$ obrotów $= 10\pi$ rad)

$$10\pi \text{ rad} = (-4{,}6 \text{ rad / s})t + \frac{1}{2}(0{,}35 \text{ rad / s}^2)t^2.$$

Jest to równanie kwadratowe ze względu na zmienną t, które po pominięciu jednostek przyjmuje postać

$$0{,}175t^2 - 4{,}6t - 31{,}4 = 0.$$

Rozwiązaniem tego równania jest $t = 32$ s. Zauważmy, że w chwili początkowej tarcza miała położenie $\theta_0 = 0$ i obracała się w kierunku ujemnym, a 32 s później ma położenie dodatnie $\theta = 5$ obrotów. Dzieje się tak dlatego, że przyspieszenie kątowe α jest dodatnie, czyli, że znaki prędkości kątowej i przyspieszenia kątowego są przeciwne. Powoduje to, że tarcza obraca się coraz wolniej, aż do osiągnięcia prędkości kątowej równej zeru, po czym zaczyna obracać się w kierunku dodatnim. W pewnej chwili linia odniesienia przyjmuje znowu położenie $\theta = 0$, a do chwili $t = 32$ s tarcza wykonuje jeszcze dalsze 5 obrotów.

Możemy odpowiedzieć na pytanie: kiedy, czyli w jakiej chwili t, tarcza osiąga prędkość kątową równą zeru (po tym czasie tarcza zacznie obracać się w kierunku dodatnim)?

Z pierwszego z równań (9.1) mamy

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{0 - (-4{,}6 \text{ rad / s})}{0{,}35 \text{ rad / s}^2} = 13 \text{ s}.$$ ■

9.3. Związki pomiędzy zmiennymi liniowymi i kątowymi

Jeśli linia odniesienia ciała sztywnego obraca się o kąt θ, to punkt tego ciała odległy od osi obrotu o r przebywa łuk okręgu o długości s danej wzorem

$$s = \theta r, \tag{9.2}$$

gdzie kąt θ jest wyrażony w radianach. Różniczkując równanie (9.2) względem czasu otrzymujemy

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} r,$$

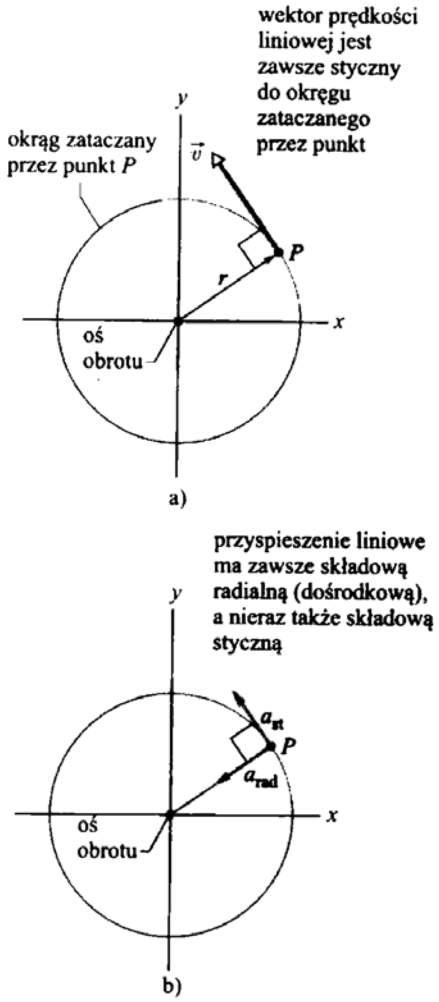
gdyż wielkość r nie zależy od czasu. Ponieważ $ds / dt = v$ (wartość bezwzględna prędkości liniowej), a $d\theta / dt = \omega$ (prędkość kątowa), więc

$$v = \omega r, \tag{9.3}$$

przy czym prędkość kątowa powinna być wyrażona w radianach na sekundę. Zauważmy, że z równania tego wynika, iż chociaż wszystkie punkty ciała sztywnego mają tę samą prędkość kątową ω, to punkty o większej odległości r od osi obrotu mają większą prędkość liniową v. Wektor prędkości liniowej $\vec{v}$ jest styczny do okręgu zataczanego przez punkt (zob. rys. 9.2 a)).

Różniczkując równanie (9.3) względem czasu otrzymujemy

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r.$$



Rys. 9.2. Wektor prędkości liniowej i przyspieszenie liniowe

Wielkość ta stanowi tylko część przyspieszenia liniowego – tę część, która jest związana ze zmianą wartości bezwzględnej v wektora prędkości liniowej $\vec{v}$. Jest to tzw. składowa styczna przyspieszenia liniowego punktu (zob. rys. 9.2 b)):

$$a_{st} = \alpha r,$$

przy czym przyspieszenie kątowe $\alpha = d\omega / dt$ powinno być wyrażone w mierze łukowej. Drugą składową przyspieszenia jest przyspieszenie skierowane radialnie do środka okręgu. Składową tę nazywa się składową radialną przyspieszenia liniowego, która powoduje zmianę kierunku wektora prędkości liniowej $\vec{v}$. Składowa ta dana jest wzorem

$$a_{rad} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r.$$

Jeśli punkt ciała porusza się ruchem jednostajnym po okręgu, to okres obrotu T, odnoszący się zarówno do ruchu punktu, jak i do ciała sztywnego jako całości wynosi

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

9.4. Energia kinetyczna w ruchu obrotowym

Obracające się ciało traktujemy jako zbiór cząstek o różnych prędkościach liniowych. Jeżeli dodamy do siebie energię kinetyczną tych wszystkich cząstek, to otrzymamy całkowitą energię kinetyczną ciała, czyli

$$E_k = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}m_3 v_3^2 + \ldots = \sum \frac{1}{2}m_i v_i^2,$$

gdzie m_i oznacza masę i-tej cząstki, a v_i – jej prędkość. Ponieważ $v = \omega r$, więc z powyższego wzoru otrzymujemy

$$E_k = \sum \frac{1}{2}m_i(\omega r_i)^2 = \frac{1}{2}\left(\sum m_i r_i^2\right)\omega^2, \tag{9.4}$$

gdyż prędkość kątowa ω jest jednakowa dla wszystkich cząstek.

Wyrażenie w nawiasie po prawej stronie równania (9.4) informuje nas, jak rozłożona jest masa obracającego się ciała wokół jego osi symetrii. Wielkość tę nazywamy *momentem bezwładności* i oznaczamy symbolem I, czyli

$$I = \sum m_i r_i^2. \tag{9.5}$$

Uwzględniając wzór (9.5), równanie (9.4) możemy napisać w postaci

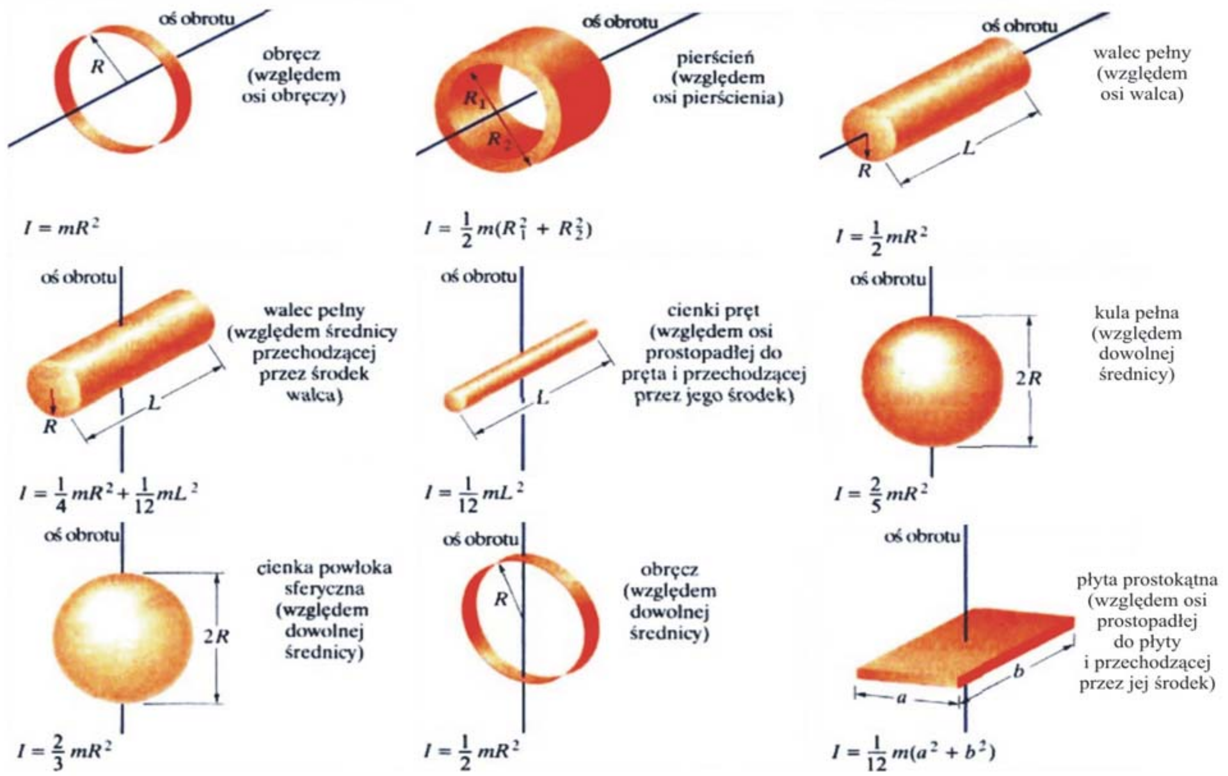
$$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Jeżeli ciało sztywne składa się z kilku cząstek, to jego moment bezwładności względem pewnej osi obrotu możemy obliczyć ze wzoru (9.5) (wyznaczając iloczyny $m_i r_i^2$ dla każdej cząstki). Jeśli jednak liczba cząstek jest bardzo duża, to wzór ten nie jest zbyt użyteczny (do obliczeń potrzebny byłby komputer). W takim przypadku sumę zastępujemy całką i definiujemy moment bezwładności ciała (rozciągłego) jako

$$I = \int r^2 dm. \tag{9.6}$$

Na rys. 9.3 podano momenty bezwładności (otrzymane przez obliczenie tej całki) dla kilku ciał o prostym kształcie i zaznaczonych osiach obrotu.

Moment bezwładności I ciała można także obliczyć, gdy znamy moment bezwładności I_{SM} tego ciała względem osi równoległej do danej osi i przechodzącej przez środek masy ciała. Jeśli odległość tych osi oznaczymy przez h (jest to odległość osi danej i osi do niej równoległej przechodzącej przez środek masy), to



Rys. 9.3. Momenty bezwładności niektórych ciał

$$I = I_{SM} + mh^2, \tag{9.7}$$

gdzie m oznacza całkowitą masę ciała. Równanie to ilustruje tzw. *twierdzenie Steinera*.

W celu udowodnienia twierdzenia Steinera oznaczmy przez O środek masy ciała o dowolnym kształcie (zob. rys. 9.4). Umieśćmy początek układu współrzędnych w punkcie O. Rozważmy oś przechodzącą przez punkt O i prostopadłą do płaszczyzny xy oraz inną oś przechodzącą przez punkt P i równoległą do pierwszej. Współrzędne x i y punktu P oznaczmy przez a i b.

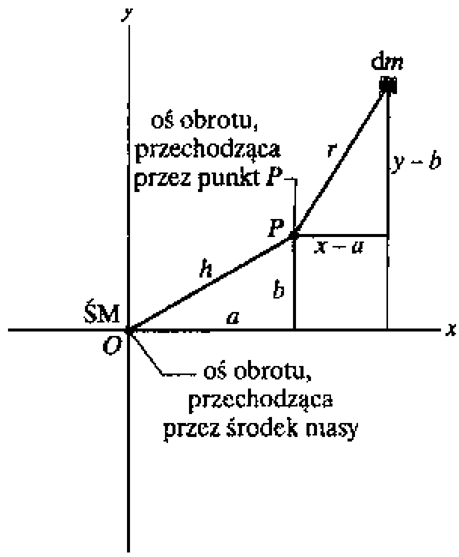
Niech dm oznacza element masy ciała o współrzędnych x i y. Z równania (9.6) wynika, że moment bezwładności ciała względem osi przechodzącej przez punkt P jest równy

$$I = \int r^2 dm = \int [(x-a)^2 + (y-b)^2]dm.$$

Równanie to można przekształcić do postaci

$$I = \int (x^2 + y^2)dm - 2a\int xdm - 2b\int ydm + (a^2 + b^2)\int dm.$$

Dla ciała rozciągłego druga i trzecia całka wyznaczają współrzędne środka masy, a ponieważ w rozważanym układzie współrzędnych jest on umieszczony w początku układu, więc całki te są równe zeru. Z rys. 9.4 widać, że $x^2 + y^2 = R^2$, więc pierwsza całka jest równa momentowi bezwładności I_{SM} względem osi przechodzącej przez środek masy ciała. Ostatnia całka jest równa m, a ponadto z rysunku mamy $a^2 + b^2 = h^2$. Zatem ostatnie równanie sprowadza się do równania (9.7).



Rys. 9.4. Przekrój ciała sztywnego o środku masy w punkcie *O*

9.5. Moment siły i druga zasada dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego

Moment siły jest miarą zdolności siły $\vec{F}$ do wprawienia ciała w ruch obrotowy względem ustalonej osi obrotu. Zdolność ta zależy nie tylko od wartości składowej stycznej F_{st} siły $\vec{F}$, ale także od tego, jak daleko od osi obrotu jest ona przyłożona (zob. rys. 9.5). Moment siły M uwzględnia obydwa te czynniki i jest definiowany jako

$$M = rF_{st} = r_{\perp} F = rF \sin\phi,$$

gdzie F_{st} oznacza składową wektora $\vec{F}$ prostopadłą do wektora $\vec{r}$, ϕ – kąt między wektorami $\vec{r}$ i $\vec{F}$, a wielkość $r_{\perp}$ jest odległością prostej, wzdłuż której działa siła $\vec{F}$, od osi obrotu. Wielkość ta nazywa się ramieniem siły $\vec{F}$ względem danej osi obrotu. Jak widać z rys. 9.5 b), ramieniem siły składowej F_{st} jest wartość bezwzględna wektora $\vec{r}$, czyli r.

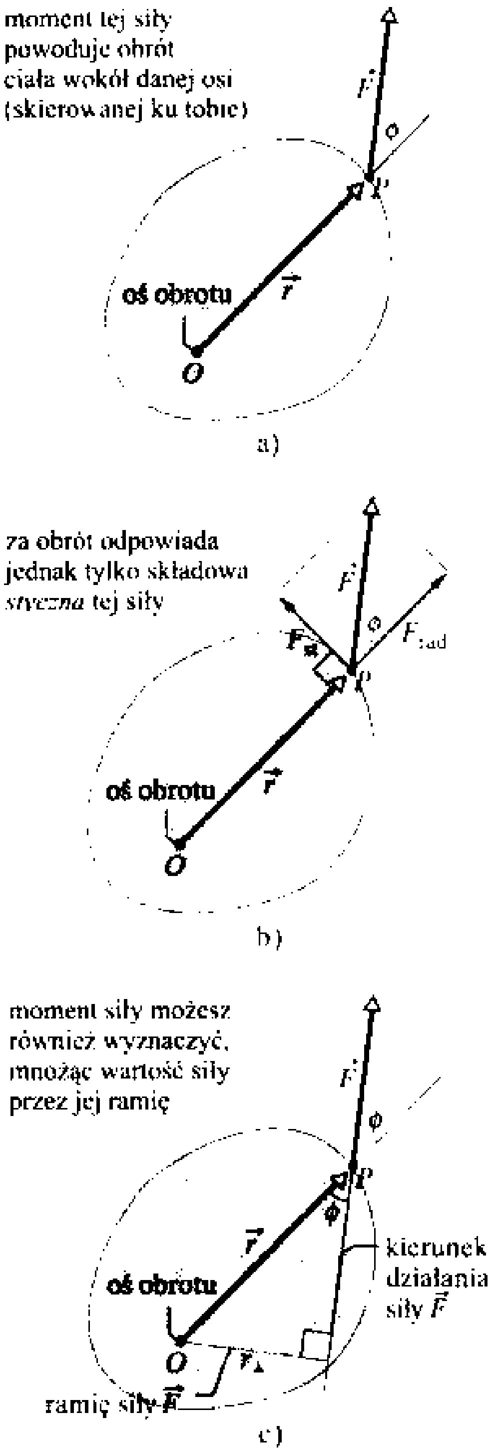
Jednostką momentu siły jest niuton razy metr (N · m.). Moment siły jest dodatni, jeśli dąży do obrotu ciała w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, a jest ujemny w przeciwnym przypadku.

Moment siły może spowodować obrót ciała sztywnego (tak dzieje się np. gdy otwieramy drzwi). Związek pomiędzy momentem siły M i wywołanym przez ten moment przyspieszeniem kątowym α stanowi drugą zasadę dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego. Mamy

$$M = I\alpha,$$

gdzie przyspieszenie kątowe powinno być wyrażone w radianach na sekundę do kwadratu. Powyższe równanie można uogólnić na przypadek, gdy na cząstkę działa więcej niż jedna siła. Otrzymujemy wówczas

$$M_{wyp} = I\alpha.$$



Rys. 9.5. Moment siły

9.6. Praca i energia kinetyczna ruchu obrotowego

Gdy moment siły wprawia ciało sztywne w ruch obrotowy wokół stałej osi, to wykonuje on nad ciałem pracę W. W związku z tym może zmieniać się energia kinetyczna związana z ruchem obrotowym ciała

$$E_k = \frac{1}{2} I\omega^2 .$$

Związek zmiany energii kinetycznej ciała ΔE_k (zakładamy, że jest to jedyna postać energii, która może ulec zmianie) z pracą W wykonaną nad układem jest następujący:

$$\Delta E_k = E_{k,\,konc} - E_{k,\,pocz} = \frac{1}{2} I\omega_{konc}^2 - \frac{1}{2} I\omega_{pocz}^2 = W,$$

przy czym I oznacza moment bezwładności, a ω_{konc} i ω_{pocz} oznaczają prędkości kątowe ciała przed i po wykonaniu pracy nad układem.

Pracę w ruchu obrotowym można wyznaczyć z równania

$$W = \int_{\theta_{pocz}}^{\theta_{konc}} M d\theta,$$

w którym M oznacza moment siły, który wykonuje pracę W, a θ_{pocz} i θ_{konc} oznaczają położenia kątowe ciała przed i po wykonaniu pracy. Gdy moment siły M jest stały, to powyższe równanie upraszcza się do postaci

$$W = M(\theta_{konc} - \theta_{pocz}).$$

Szybkość, z jaką jest wykonywana praca, czyli moc, jest dana wzorem (por. odpowiedni wzór dla ruchu liniowego)

$$P = \frac{dW}{dt} = M\omega.$$

Zadania

1. Dobry baseballista potrafi rzucić piłkę z prędkością 85 mil na godzinę, wprawiając ją jednocześnie w ruch obrotowy z prędkością 1800 obrotów / min. Ile obrotów wykona piłka na drodze 60 stóp? Dla uproszczenia przyjąć, że tor piłki jest linią prostą.
2. Bęben obraca się wokół swej osi symetrii z prędkością kątową 12,6 rad / s. W pewnej chwili (np. $t = 0$) bęben zaczyna zwalniać, przy czym jego prędkość kątowa maleje w tempie 4,2 rad / s^2.
   a) Po jakim czasie bęben przestanie obracać się?
   b) O jaki kąt w tym czasie obróci się?
3. Krążek, obracający się początkowo z prędkością 120 rad / s, w pewnej chwili zaczyna zwalniać ze stałym przyspieszeniem kątowym o wartości 4 rad / s^2.
   a) Po jakim czasie krążek zatrzyma się?

b) O jaki kąt obróci się on w tym czasie?

4. Statek kosmiczny porusza się po łuku okręgu o promieniu 3220 km poruszając się z prędkością 29 000 km / h. Jaka jest wartość jego:
   a) prędkości kątowej,
   b) przyspieszenia radialnego,
   c) przyspieszenia stycznego?
5. W okresie od 1911 do 1990 roku wierzchołek krzywej wieży w Pizie przemieszczał się na południe ze średnią prędkością 1,2 mm / rok. Wysokość wieży wynosi 55 m. Oblicz średnią prędkość kątową wierzchołka wieży względem jej podstawy wyrażając ją w radianach na sekundę.
6. Koło zamachowe o średnicy 1,2 m obraca się z prędkością kątową równą 200 obrotów na minutę.
   a) Ile wynosi prędkość kątowa w radianach na sekundę?
   b) Ile wynosi prędkość liniowa punktu na obrzeży koła?
   c) Jakie stałe przyspieszenie należy nadać temu kołu, aby zwiększyć jego prędkość kątową do wartości 1000 obrotów na minutę w czasie 60 s? Podać odpowiedź w obrotach na minutę do kwadratu.
   d) Ile obrotów wykona koło w czasie 60 sekund?
7. Obliczyć moment bezwładności koła, które ma energię kinetyczną równą 24 400 J, gdy obraca się z prędkością kątową 602 obrotów / min.
8. Dwa jednorodne walce o takich samych masach równych 1,25 kg, ale o różnych promieniach podstawy, zostały wprawione (każdy z osobna) w ruch obrotowy wokół swej osi z prędkością kątową 235 rad / s. Ile wynosi energia kinetyczna ruchu obrotowego:
   a) walca o mniejszym promieniu podstawy równym 0,25 m,
   b) walca o większym promieniu podstawy równym 0,75 m?
9. Oblicz moment bezwładności przymiaru metrowego o masie 0,56 kg względem osi prostopadłej do przymiaru i przechodzącej przez kreskę oznaczoną jako 20 cm (przyjąć, że przymiar można uważać za cienki pręt).
10. Niewielką kulkę o masie 0,75 kg przymocowano do końca pręta o długości 1,25 m i znikomo małej masie, a drugi koniec pręta zawieszono na osi. Wyznacz moment siły działający na utworzone w ten sposób wahadło, gdy jest ono odchylone od pionu o kąt 30°.
11. Podczas odbicia się skoczka od trampoliny prędkość kątowa jego obrotu wokół środka masy wzrasta od zera do 6,2 rad / s w czasie 220 ms. Wyznaczyć wartość:
   a) średniego przyspieszenia kątowego skoczka,
   b) średniego momentu siły działającego na niego ze strony trampoliny, jeśli moment bezwładności skoczka względem środka jego masy wynosi 12 kg · m^2.
12. Wał korbowy samochodu przenosi energię z silnika na oś z szybkością 100 KM (= 74,6 kW) obracając się z prędkością 1800 obrotów / min. Jakim momentem siły (w niutonach razy metr) działa on na oś?
13. Koło o masie 32 kg, które można uważać za cienką obręcz o promieniu 1,2 m, obraca się z prędkością 280 obrotów / min. Trzeba je zatrzymać w ciągu 15 s.
   a) Jaką pracę należy przy tym wykonać?
   b) Jaka średnia moc jest do tego potrzebna?

X. TOCZENIE SIĘ CIAŁ, MOMENT SIŁY I MOMENT PĘDU

10.1. Siły i energia kinetyczna w ruchu tocznym

Będziemy zajmować się ciałami toczącymi się bez poślizgu na podłożu. Wyobraźmy sobie koło roweru, które porusza się ze stałą prędkością i niedoznające poślizgu. Środek masy tego koła i punkt, w którym koło styka się z podłożem przemieszczają się do przodu ze stałą prędkością v_{SM}. Jeśli przez pewien czas t obydwa te punkty przebyły drogę s, to rowerzysta widzi, że koło obróciło się w tym czasie wokół swej osi o kąt θ, a dowolny punkt na obrzeżu koła zakreślił łuk o długości s. Ta długość łuku s jest związana z kątem obrotu θ równaniem

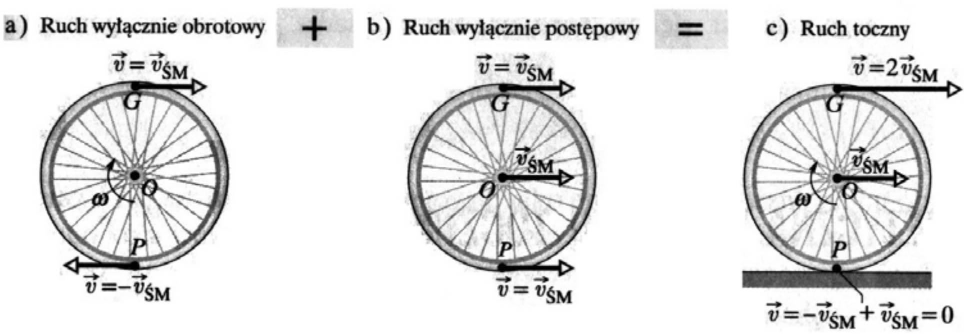
$$s = \theta R,$$

gdzie R oznacza promień koła. Różniczkując to równanie względem czasu otrzymujemy

$$v_{SM} = \omega R, \tag{10.1}$$

gdzie ω oznacza prędkość kątową koła wokół jego osi, która jest równa $d\theta / dt$ (wartość R jest stała).

Jak widać na rys. 10.1, toczenie się koła (bez poślizgu) można uważać za połączenie ruchu wyłącznie postępowego (rys. 10.1 b)) i ruchu wyłącznie obrotowego (rys. 10.1 a)). Zauważmy, że punkt znajdujący się na dole koła (punkt P) ma prędkość liniową równą zeru, a punkt znajdujący się na górze (punkt G) porusza się z prędkością liniową $2v_{SM}$, czyli najszybciej spośród wszystkich punktów koła.



Rys. 10.1 Toczenie się koła

Jeżeli uwzględnimy tylko ruch obrotowy, to na podstawie p. 9.4 energia kinetyczna toczącego się koła jest równa

$$E_k = \frac{1}{2} I_P \omega^2,$$

gdzie ω oznacza prędkość kątową koła, a I_P – moment bezwładności koła względem osi przechodzącej przez punkt P. Z twierdzenia Steinera ($I = I_{SM} + mh^2$) dostajemy

$$I_P = I_{SM} + mR^2,$$

gdzie m oznacza masę koła, I_{SM} – jego moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy koła, a R (promień koła) oznacza odległość tych dwóch osi obrotu (wielkość h w twierdzeniu Steinera). Podstawiając wielkość I_P do poprzedniego wzoru mamy

$$E_k = \frac{1}{2} I_{SM} \omega^2 + \frac{1}{2} mR^2 \omega^2,$$

skąd po uwzględnieniu zależności $v_{SM} = \omega R$ otrzymujemy

$$E_k = \frac{1}{2} I_{SM} \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{SM}^2.$$

Pierwszy wyraz możemy interpretować jako energię kinetyczną ruchu obrotowego koła wokół osi przechodzącej przez środek jego masy, a drugi – jako energię kinetyczną ruchu postępowego środka masy koła. Mamy zatem poniższą zasadę.

Toczące się ciało ma dwa rodzaje energii kinetycznej: energię kinetyczną ruchu obrotowego $\left(\frac{1}{2} I_{SM} \omega^2\right)$ związaną z jego ruchem obrotowym przechodzącym przez środek masy oraz energię kinetyczną ruchu postępowego $\left(\frac{1}{2} m v_{SM}^2\right)$ związaną z ruchem postępowym środka masy.

Rozważmy teraz toczenie się ciała po równi pochyłej. Na rys. 10.2 przedstawiono jednorodne ciało okrągłe o masie m i promieniu R, które stacza się bez poślizgu po równi pochyłej wzdłuż osi x tworzącej kąt θ z poziomem. Naszym celem jest wyznaczenie przyspieszenia $a_{SM,x}$ ruchu ciała wzdłuż równi. W tym celu należy rozważyć siły działające na ciało. Mamy:

- działającą na ciało siłę ciężkości $\vec{F}_g$, która jest skierowana pionowo w dół; jeśli koniec jej wektora umieścimy w środku masy ciała, to jej składowa wzdłuż równi wynosi

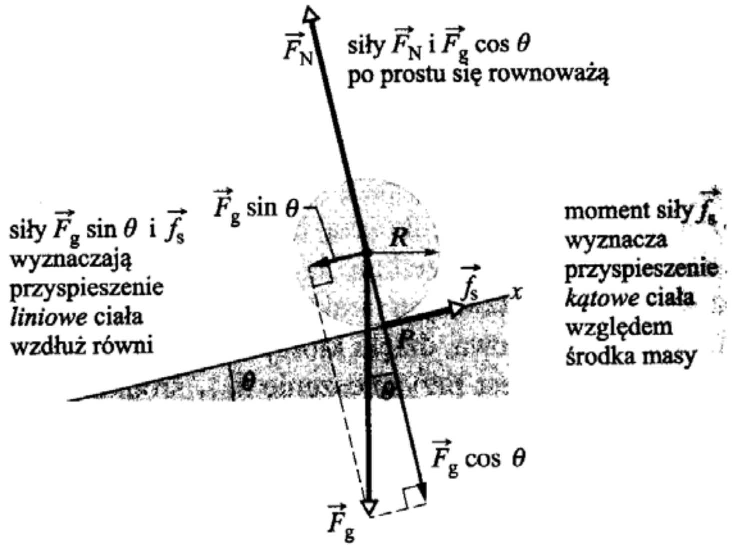
$$F_g \sin\theta = mg \sin\theta;$$

- siłę normalną $\vec{F}_N$, która działa prostopadle do równi w punkcie P jego styczności z podłożem (na rys. 10.2 przesunięto wektor tej siły wzdłuż jego kierunku, tak aby jego początek znajdował się w środku masy ciała),
- siłę tarcia statycznego $\vec{f}_s$, która działa na ciało w punkcie P styczności z podłożem i jest skierowana wzdłuż równi w górę.

Z drugiej zasady dynamiki Newtona dla składowych wzdłuż osi x mamy

$$f_s - mg \sin\theta = m a_{SM,x}. \qquad (10.2)$$

Równanie to zawiera dwie niewiadome: f_s i $a_{SM,x}$.



Rys. 10.2. Staczanie się jednorodnego ciała okrągłego po równi pochyłej

Ramię siły tarcia $\vec{f}_s$ wynosi R, co daje moment siły o wartości Rf_s, który jest dodatni, bo dąży do obrotu ciała w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Ramiona sił $\vec{F}_g$ i $\vec{F}_N$ względem środka masy są równe zeru, a zatem nie są z nimi związane żadne momenty siły. Drugą zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego ($M_{wyp} = I\alpha$) można zatem dla osi przechodzącej przez środek masy zapisać następująco:

$$Rf_s = I_{SM}\alpha. \tag{10.3}$$

Równanie to zawiera także dwie niewiadome: f_s i α (przyspieszenie kątowe).

Ciało toczy się bez poślizgu, więc możemy skorzystać z równania (10.1), które po zróżniczkowaniu względem czasu daje

$$-a_{SM,x} = \alpha R.$$

Znak minus bierze się stąd, że wektor przyspieszenia ma kierunek ujemny osi x, a przyspieszenie kątowe α jest dodatnie, bo obrót następuje w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

Jeżeli z ostatniego równania wyznaczymy α i podstawimy do równania (10.3), to otrzymamy

$$f_s = -I_{SM}\frac{a_{SM,x}}{R^2}.$$

Podstawiając prawą stronę tej zależności do równania (10.2) dostajemy ostatecznie

$$a_{SM,x} = -\frac{g\sin\theta}{1 + I_{SM}/mR^2}.$$

Z równania tego można obliczyć przyspieszenie liniowe $a_{SM,x}$ każdego ciała staczającego się po równi pochyłej, która jest nachylona do poziomu pod kątem θ.

10.2. Moment siły i moment pędu

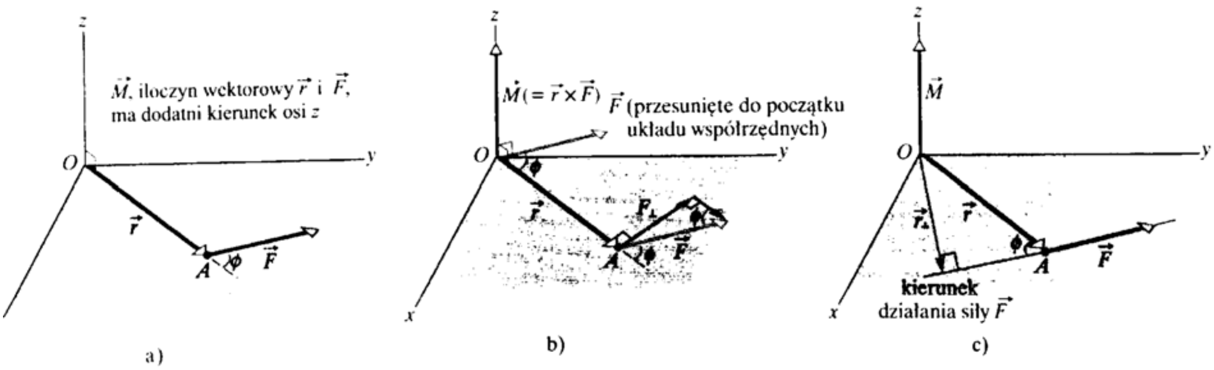
W przestrzeni trójwymiarowej moment siły $\vec{M}$ jest wielkością wektorową zdefiniowaną względem pewnego punktu (zwykle początku układu współrzędnych) wzorem

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F},$$

gdzie $\vec{F}$ oznacza siłę działającą na cząstkę, a $\vec{r}$ oznacza wektor położenia cząstki względem ustalonego punktu (zob. rys. 10.3 a)). Wartość bezwzględna wektora $\vec{M}$ jest równa

$$M = rF\sin\phi = rF_{\perp} = r_{\perp}F,$$

gdzie ϕ oznacza kąt pomiędzy wektorami $\vec{r}$ i $\vec{F}$, $F_{\perp}$ oznacza składową wektora $\vec{F}$ w kierunku prostopadłym do wektora $\vec{r}$, a $r_{\perp}$ oznacza ramię siły $\vec{F}$ (zob. rys. 10.3 b)). Kierunek wektora $\vec{M}$ wynika z reguły prawej dłoni dla iloczynu wektorowego (zob. rys. 10.3 c)).



Rys. 10.3. Moment siły w przestrzeni trójwymiarowej

Moment pędu $\vec{\ell}$ cząstki o pędzie $\vec{p}$, masie m i prędkości liniowej $\vec{v}$ jest wielkością wektorową zdefiniowaną względem pewnego punktu (zwykle początku układu współrzędnych) wzorem

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}).$$

Wartość bezwzględna wektora $\vec{\ell}$ jest równa

$$\ell = rmv\sin\phi = rp_{\perp} = rmv_{\perp} = r_{\perp}p = r_{\perp}mv,$$

gdzie ϕ oznacza kąt pomiędzy wektorami $\vec{r}$ i $\vec{p}$, $p_{\perp}$ i $v_{\perp}$ – składowe wektorów $\vec{p}$ i $\vec{v}$ w kierunku prostopadłym do kierunku wektora $\vec{r}$, a $r_{\perp}$ oznacza odległość punktu, względem którego obliczamy moment pędu, od kierunku wektora $\vec{p}$. Kierunek wektora $\vec{\ell}$ wynika z reguły prawej dłoni: jeżeli palce ustawimy wzdłuż łuku, jaki trzeba zatoczyć, by nałożyć wektor $\vec{r}$ na wektor $\vec{p}$, to kciuk wskaże kierunek wektora $\vec{\ell}$.

Druga zasada dynamiki Newtona, zapisana w postaci

$$\vec{F}_{wyp} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

przedstawia związek siły z pędem dla pojedynczej cząstki. Dla ruchu obrotowego zasada ta przyjmuje postać wzoru

$$\vec{M}_{wyp} = \frac{d\vec{\ell}}{dt},$$

co słowami można wyrazić następująco: suma wektorowa wszystkich momentów siły działających na cząstkę jest równa szybkości zmiany momentu pędu tej cząstki.

10.3. Moment pędu ciała sztywnego

Moment pędu $\vec{L}$ układu cząstek jest sumą wektorową momentów pędu poszczególnych cząstek, tj.

$$\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \ldots + \vec{\ell}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\ell}_i.$$

Szybkość, z jaką zmienia się moment pędu, jest równa wypadkowemu zewnętrznemu momentowi sił działających na układ, czyli sumie wektorowej wszystkich zewnętrznych momentów sił, które działają na cząstki układu, co można zapisać wzorem

$$\vec{M}_{wyp} = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$

Dla ciała sztywnego obracającego się wokół stałej osi składowa jego momentu pędu równoległa do osi obrotu wynosi

$$L = I\omega,$$

gdzie I oznacza moment bezwładności ciała względem tej osi, a ω – jego prędkość kątową.

10.4. Zachowanie momentu pędu

Moment pędu układu $\vec{L}$ nie zmienia się, gdy wypadkowy zewnętrzny moment siły działający na układ jest równy zeru, co można zapisać następująco:

$$\vec{L} = \text{const}.$$

Jest to zasada zachowania momentu pędu. Można ją też zapisać wzorem

$$\vec{L}_{pocz} = \vec{L}_{konc}$$

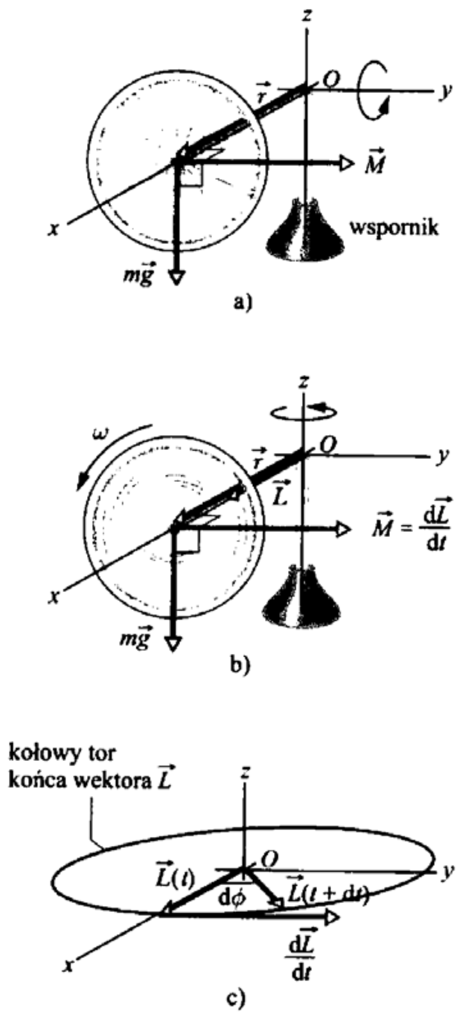
i wyrazić słowami: jeśli działający na układ wypadkowy moment siły jest równy zeru, to całkowity moment pędu $\vec{L}$ układu nie zmienia się niezależnie od tego, jakim zmianom podlega układ.

10.5. Precesja żyroskopu

Prosty żyroskop składa się z koła osadzonego na ośce, mogącego na tej ośce obracać się wokół osi. Jeśli koniec ośki oprzemy na wsporniku (zob. rys. 10.4 a)), a koło nie będzie obracać się i puścimy je swobodnie, to koło opadnie, obracając się w dół wokół osi poziomej przechodzącej przez punkt podparcia ośki na wsporniku. Ponieważ musi być przy tym spełniona druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego, czyli

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt},$$

oznacza to, że moment siły, który jest źródłem obrotu w dół (czyli upadku koła), zmienia moment pędu żyroskopu $\vec{L}$, który początkowo był równy zeru. Moment siły $\vec{M}$ jest momentem siły ciężkości $m\vec{g}$, która działa na środek masy żyroskopu, za który możemy przyjąć środek koła.



Rys. 10.4. Precesja żyroskopu

Żyroskop, którego koło szybko obraca się, zachowuje się inaczej. Jeśli puścimy go swobodnie w chwili, w której ośka jest lekko skierowana w górę, to koło najpierw nieco opadnie, a zaraz potem, wciąż obracając się na ośce, zacznie się wraz z nią obracać w płaszczyźnie poziomej wokół osi pionowej przechodzącej przez punkt podparcia O. Ten ruch nazywa się *precesją*.

Aby to wyjaśnić, rozważmy moment pędu $\vec{L}$ żyroskopu związany z ruchem obrotowym koła. Dla prostoty załóżmy, że koło wiruje bardzo szybko, co oznacza, że moment pędu $\vec{L}$ jest dużo większy niż moment pędu zwiany z precesją żyroskopu. Przyjmijmy też, że gdy precesja zaczyna się, ośka żyroskopu jest pozioma (zob. rys. 10.4 b)). Długość wektora $\vec{L}$ wynosi

$$L = I\omega, \tag{10.4}$$

gdzie I oznacza moment bezwładności żyroskopu względem jego ośki, a ω – prędkość kątową, z jaką koło wiruje na ośce. Wektor $\vec{L}$ ma kierunek ośki i ponieważ jest on równoległy do wektora $\vec{r}$, więc wektor momentu siły $\vec{M}$ musi być prostopadły do wektora $\vec{L}$ (zob. rys. 10.4 b)).

Pod wpływem momentu siły $\vec{M}$ w małym przedziale czasu dt zachodzi mała zmiana $d\vec{L}$ momentu pędu żyroskopu, czyli

$$d\vec{L} = \vec{M}dt. \tag{10.5}$$

Ponieważ żyroskop wiruje bardzo szybko, wartość wektora $\vec{L}$ jest cały czas określona przez równanie (10.4). Moment siły jest w stanie zmienić tylko kierunek wektora $\vec{L}$, ale nie jego wartość.

Z równania (10.5) widać, że wektor $d\vec{L}$ ma taki sam kierunek, jak wektor $\vec{M}$, czyli jest prostopadły do wektora $\vec{L}$. Jeśli zatem zmiana wektora $\vec{L}$ ma mieć kierunek wektora $\vec{M}$, to jedynym sposobem, aby tak było, jest obrót wektora $\vec{L}$ wokół osi z (zob. rys. 10.4 c)). Wektor $\vec{L}$ nie zmienia długości, jego koniec zatacza kołowy tor, a wektor $\vec{M}$ jest zawsze styczny do tego toru. Ponieważ wektor $\vec{L}$ ma zawsze kierunek ośki, to ośka, a zatem i cały żyroskop obraca się wokół osi z w kierunku wektora $\vec{M}$ i to jest właśnie precesja.

Aby wyznaczyć prędkość kątową precesji Ω, należy najpierw obliczyć długość wektora $d\vec{L}$. Mamy

$$dL = Mdt = mgr \sin 90^\circ \, dt = mgrdt, \tag{10.6}$$

bo kąt między wektorami $m\vec{g}$ i $\vec{r}$ wynosi 90° (zob. rys. 10.4 a)). Gdy w małym przedziale czasu dt wektor $\vec{L}$ ulega niewielkiej zmianie, ośka i wektor $\vec{L}$ zataczają mały kąt $d\phi$, gdy wykonują precesję wokół osi z (na rys. 10.4 c) kąt $d\phi$ narysowano przesadnie duży). Z równań (10.4) i (10.6) otrzymujemy

$$d\phi = \frac{dL}{L} = \frac{mgrdt}{I\omega}.$$

Po podzieleniu tego równania przez dt otrzymamy

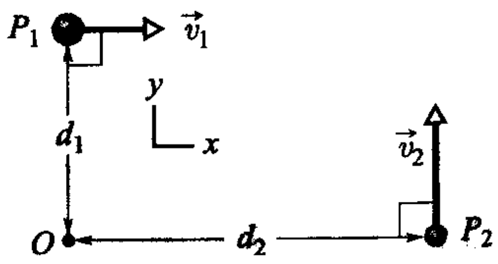
$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{mgr}{I\omega}.$$

Zauważmy, że prędkość kątowa precesji Ω maleje, gdy rośnie prędkość kątowa ω oraz że, gdyby na żyroskop nie działała siła ciężkości $m\vec{g}$, to nie byłoby i jego precesji.

Zadania

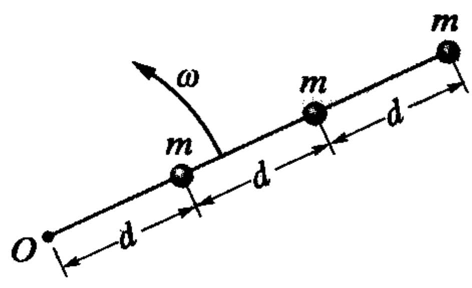
1. Samochód jedzie po prostej drodze w dodatnim kierunku osi x z prędkością 80 km / h. Każde koło pojazdu ma średnicę 66 cm. Wyznaczyć prędkość $\vec{v}$ (wykorzystując wektory jednostkowe):
   a) środka koła,
   b) punktu na górze koła,
   c) punktu na dole koła względem osoby prowadzącej samochód.
   Wyznaczyć wartość a przyspieszenia;
   d) środka koła,
   e) punktu na górze koła,
   f) punktu na dole koła względem osoby prowadzącej samochód.
   Wyznaczyć prędkość $\vec{v}$ (wykorzystując wektory jednostkowe):
   g) środka koła,
   h) punktu na górze koła,
   i) punktu na dole koła względem autostopowicza siedzącego przy drodze.
   Wyznaczyć wartość a przyspieszenia;
   j) środka koła,
   k) punktu na górze koła,
   l) punktu na dole koła względem autostopowicza siedzącego przy drodze.
2. Obręcz o masie 140 kg toczy się po poziomej podłodze tak, że jej środek masy porusza się z prędkością 0,15 m / s. Ile wynosi praca potrzebna do zatrzymania tej obręczy?
3. Samochód o masie 1000 kg ma cztery koła o masie 10 kg każde. Jaki ułamek całkowitej energii kinetycznej pojazdu stanowi energia kinetyczna ruchu obrotowego kół wokół ich osi? Przyjąć, że koła mają taki sam moment bezwładności, jak jednorodne krążki o takiej jak one masie i średnicy.
4. Na pchłę znajdującą się w punkcie o współrzędnych (0, −4 m, 5 m) działają dwie siły: $\vec{F}_1 = (3\ \mathrm{N})\hat{\mathrm{k}}$ i $\vec{F}_2 = (-2\ \mathrm{N})\hat{\mathrm{j}}$. Ile wynosi całkowity moment siły względem początku układu współrzędnych, jaki działa na tę pchłę?
5. Wyznacz moment siły względem początku układu współrzędnych, jaki działa na cząstkę znajdującą się w punkcie o współrzędnych (0, −4 m, 3 m), na którą działa:
   a) siła $\vec{F}_1$ o składowych $F_{1x} = 2$ N oraz $F_{1y} = F_{1z} = 0$,
   b) siła $\vec{F}_2$ o składowych $F_{2x} = 0$, $F_{2y} = 2$ N oraz $F_{2z} = 4$ N.
   Podać wynik w zapisie przy użyciu wektorów jednostkowych.
6. W pewnej chwili na ciało o masie 0,25 kg, wektorze położenia $\vec{r} = (2\hat{\mathrm{i}} - 2\hat{\mathrm{k}})$ m i wektorze prędkości $\vec{v} = (-5\hat{\mathrm{i}} + 5\hat{\mathrm{k}})$ m / s działa siła $\vec{F} = 4\hat{\mathrm{j}}$ N. Wyznaczyć:
   a) moment pędu ciała,
   b) działający na nie moment siły względem początku układu współrzędnych.
   Podać wynik w zapisie przy użyciu wektorów jednostkowych.
7. Ciało P_1 ma masę 6,5 kg oraz równoległą do osi x prędkość o wartości $v_1 = 2{,}2$ m / s. Ciało P_2 ma masę 3,1 kg oraz równoległą do osi y prędkość o wartości $v_2 = 3{,}6$ m / s. Na rys. 10.5 przedstawiono położenie tych ciał w chwili, w której są one odległe od punktu O o odległości $d_1 = 1{,}5$ m i $d_2 = 2{,}8$ m. Wyznaczyć
   a) wartość,

b) kierunek całkowitego momentu pędu tych ciał względem punktu O.



Rys. 10.5. Zadanie 7

8. W chwili $t = 0$ cząstka o masie 3 kg znajduje się w punkcie o współrzędnych $x = 3$ m, $y = 8$ m i ma prędkość $\vec{v} = (5\,\mathrm{m/s})\hat{i} - (6\,\mathrm{m/s})\hat{j}$. Siła o wartości 7 N działa na nią w ujemnym kierunku osi x.
   a) Ile wynosi moment pędu tej cząstki względem początku układu współrzędnych?
   b) Ile wynosi działający na nią moment siły względem początku układu współrzędnych?
   c) Z jaką szybkością zmienia się w czasie moment pędu tej cząstki?
9. Trzy cząstki o masie $m = 23$ g każda połączono ze sobą i z osią obrotu, przechodzącą przez punkt O, za pomocą trzech prętów o długości $d = 12$ cm i znikomo małej masie (zob. rys. 10.6). Układ ten wykonuje ruch obrotowy z prędkością kątową $\omega = 0{,}85$ rad / s. Wyznaczyć:
   a) moment bezwładności układu cząstek,
   b) wartość momentu pędu środkowej cząstki,
   c) wartość całkowitego momentu pędu układu cząstek względem punktu O.



Rys. 10.6. Zadanie 8

10. Moment pędu koła zamachowego o momencie bezwładności względem osi koła równym $0{,}14\ \mathrm{kg \cdot m^2}$ maleje w ciągu 1,5 s z 3 do $0{,}8\ \mathrm{kg \cdot m^2 / s}$.
    a) Ile wynosi średnia wartość momentu siły względem osi koła działającego na nie w tym czasie?
    b) O jaki kąt obraca się koło w tym czasie przy założeniu, że jego przyspieszenie kątowe jest stałe?

c) Jaka praca zostaje wykonana nad kołem w tym czasie?
d) Ile wynosi średnia moc tego koła zamachowego?

11. Człowiek stoi na platformie obracającej się bez tarcia z prędkością kątową 1,2 obrotów / s i w każdej z wyciągniętych rąk trzyma cegłę. Moment bezwładności układu złożonego z człowieka, cegieł i platformy względem osi obrotu wynosi 6 kg · m^2. Przyciągając cegły do tułowia, człowiek zmniejsza moment bezwładności układu do wartości 2 kg · m^2.
a) Ile wynosi prędkość kątowa platformy po wykonaniu przez człowieka tego manewru?
b) Ile wynosi stosunek końcowej i początkowej energii kinetycznej układu?

12. Tor modelu kolejki elektrycznej został ułożony na dużym kole, które może obracać się bez tarcia wokół pionowej osi. Na torze ustawiono kolejkę o masie m i w chwili, w której cały układ pozostawał w spoczynku, włączono jej zasilanie. Po upływie pewnego czasu kolejka porusza się ze stałą prędkością o wartości 0,15 m / s względem toru. Z jaką prędkością kątową obraca się wówczas koło, którego masa wynosi 1,1 m, a promień jest równy 0,43 m? Wskazówka: potraktować koło jako obręcz oraz pominąć masę szprych i piasty koła.

13. Dwie tarcze umocowano na wspólnej osi za pomocą łożysk o bardzo małym tarciu. Tarcze te mogą zostać ze sobą sprzężone tak, że będą się obracać łącznie – jak jedno ciało. Wyobraźmy sobie, że pierwszą tarczę, o momencie bezwładności względem jej osi równym 3,3 kg · m^2, wprawiono w ruch obrotowy z prędkością kątową 450 obrotów / min, a drugą tarczę, o momencie bezwładności względem jej osi równym 6,6 kg · m^2, wprawiono w ruch obrotowy z prędkością kątową 900 obrotów / min w tym samym kierunku co pierwszą. Następnie sprzęgnięto tarcze ze sobą.
a) Ile wynosi ich prędkość kątowa po sprzężeniu?
Wyobraźmy sobie następnie, że druga tarcza obraca się początkowo z prędkością kątową 900 obrotów / min, ale w kierunku przeciwnym niż pierwsza.
b) Ile wynosi w tym przypadku prędkość kątowa tarcz po ich sprzężeniu?
c) W którą stronę one obracają się?

14. Pewien żyroskop składa się z jednorodnego krążka o promieniu 50 cm umocowanego na ośce o długości 11 cm i znikomo małej masie. Ośka jest pozioma i podparta na końcu. Wyznaczyć prędkość kątową precesji żyroskopu, gdy krążek wiruje z prędkością kątową 1000 obrotów / s.