Elementy analizy numerycznej

wykłady 7 i 8

zadania

zad. 1
Stosując metodę eliminacji Gaussa (bez wyboru elementu podstawowego) rozwiązać układ równań

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 \quad\quad &= 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1, \\ -x_2 + 3x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ile działań należy wykonać?

Układ równań postaci $Ax = b$ należy najpierw doprowadzić do postaci $Rx = c$, gdzie R oznacza macierz trójkątną górną. W tym celu utwórzmy macierz (do macierzy A dopisujemy wektor wyrazów wolnych b)

$$(A, b) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zgodnie z wzorami podanymi na str. 52 (zob. wykład 7) wykonujemy przekształcenia

$$a'_{ij} = a_{ij} - l_{i1}a_{1j}, \quad b'_i = b_i - l_{i1}b_1, \tag{1}$$

gdzie

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}},$$

przy czym $i = 2, 3$ oraz $j = 2, 3$ (bo liczba równań w naszym układzie wynosi $n = 3$). Mamy

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{1}{3}, \quad l_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{0}{3} = 0$$

i do obliczenia tych wielkości trzeba było wykonać 2 dzielenia. Tworzoną w pierwszym kroku eliminacji macierz (A', b') będziemy dalej oznaczać przez $(A^{(1)}, b^{(1)})$. Zgodnie z wzorami (1) elementy tej macierzy są równe

$$a_{22}^{(1)} = a_{22} - l_{21}a_{12} = 2 - \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{5}{3},$$

$$a_{23}^{(1)} = a_{23} - l_{21}a_{13} = -1 - \frac{1}{3} \cdot 0 = -1,$$

$$a_{32}^{(1)} = a_{32} - l_{31}a_{12} = -1 - 0 \cdot 1 = -1,$$

$$a_{33}^{(1)} = a_{33} - l_{31}a_{13} = 3 - 0 \cdot 0 = 3,$$

$$b_2^{(1)} = b_2 - l_{21}b_1 = 1 - \frac{1}{3} \cdot 0 = 1,$$

$$b_3^{(1)} = b_3 - l_{31}b_1 = 0 - 0 \cdot 0 = 0.$$

Do wykonania tych obliczeń należało wykonać 6 mnożeń i 6 odejmowań, czyli razem 12 działań. Otrzymana macierz ma postać

$$(A^{(1)}, b^{(1)}) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

W drugim kroku eliminacji rozważamy macierz (w macierzy (2) pomijamy pierwszy wiersz i pierwszą kolumnę)

$$(A, b) = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Mamy

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{-1}{\frac{5}{3}} = -\frac{3}{5}$$

oraz

$$\tilde{a}_{22} = a_{22} - l_{21}a_{12} = 3 - \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot (-1) = \frac{12}{5},$$

$$\tilde{b}_2 = b_2 - l_{21}b_1 = 0 - \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot 1 = \frac{3}{5}.$$

Wykonaliśmy 1 dzielenie, 2 mnożenia i 2 odejmowania, czyli razem 5 działań. Po wykonaniu eliminacji dla macierzy (3) otrzymaliśmy zatem macierz

$$(\tilde{A}, \tilde{b}) = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -1 & 1 \\ 0 & \frac{12}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

Oznacza to, że drugi (i ostatni) krok eliminacji daną macierz (A, b) doprowadził do macierzy

$$(A^{(2)}, b^{(2)}) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{12}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = (R, c).$$

Na podstawie wzoru (zob. wykład 7 str. 52)

$$x_i = \frac{c_i - \sum\limits_{k=i+1}^{3} r_{ik} x_k}{r_{ii}}, \quad i = 3, 2, 1,$$

możemy już wyznaczyć szukane wartości x_i. Mamy

$$x_3 = \frac{c_3}{r_{33}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{12}{5}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0{,}25,$$

$$x_2 = \frac{c_2 - r_{23} x_3}{r_{22}} = \frac{1 - (-1) \cdot \frac{1}{4}}{\frac{5}{3}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{4} = 0{,}75,$$

$$x_1 = \frac{c_1 - r_{12} x_2 - r_{13} x_3}{r_{11}} = \frac{0 - 1 \cdot \frac{3}{4} - 0 \cdot \frac{1}{4}}{3} = -\frac{1}{4} = -0{,}25$$

i do wyznaczenia tych wielkości trzeba było wykonać 3 dzielenia, 3 mnożenia i 3 odejmowania. Razem wykonaliśmy 11 mnożeń, 6 dzieleń i 11 odejmowań, czyli 28 działań. Liczbę niezbędnych działań w metodzie eliminacji Gaussa można wyznaczyć bezpośrednio z wzoru (4.7) (zob. wykład 8), tj. bez wykonywania przedstawionych obliczeń, przyjmując w nim $n = 3$. Mamy

$$R = \frac{n(4n^2 + 9n - 7)}{6} = \frac{3(4 \cdot 9 + 9 \cdot 3 - 7)}{6} = \frac{3(36 + 27 - 7)}{6} = \frac{3 \cdot 56}{6} = \frac{168}{6} = 28.$$

zad. 2

Rozwiązać układ równań z zadania 1 stosując rozkład Choleskiego. Jaka jest liczba wszystkich działań?

Aby można było zastosować metodę Choleskiego, macierz układu równań musi być dodatnio określona. Łatwo zauważyć, że dana macierz jest symetryczna, a więc jest spełniony warunek a) definicji 4.1 (zob. wykład 8 str. 55). Drugi warunek podany w tej definicji (warunek b)) dla naszej macierzy ma postać

$$\underset{\substack{x \in \mathbf{R}^3 \\ x \neq 0}}{\forall} x^T A x > 0,$$

czyli musi być spełniony warunek (dla każdego wektora $x \neq 0$)

$$[x_1, x_2, x_3]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= [a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3, a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3, a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3)x_1 + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3)x_2 + (a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3)x_3$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + (a_{21} + a_{12})x_1x_2 + (a_{31} + a_{13})x_1x_3 + (a_{32} + a_{23})x_2x_3$$

$$= 3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + (1+1)x_1x_2 + (0+0)x_1x_3 + (-1+(-1))x_2x_3$$

$$= 3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$$

$$\geq x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$$

$$= (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 > 0.$$

Warunek ten jest oczywiście zawsze spełniony (suma kwadratów jest większa od zera, o ile przynajmniej jedna z wartości x_i, $i = 1, 2, 3$, jest różna od zera).

Uwaga: W ogólnym przypadku badanie dodatniej określoności macierzy bezpośrednio z definicji jest żmudne i trudne. Dlatego w praktyce warunek ten sprawdzamy z twierdzenia, które mówi, że macierz jest dodatnio określona, gdy wszystkie jej minory główne są dodatnie, gdzie minorem głównym nazywa się wyznacznik macierzy powstałej z danej macierzy przez skreślenie wierszy i kolumn o tych samych indeksach.

Gdybyśmy chcieli skorzystać z tego twierdzenia w naszym zadania, to musielibyśmy obliczyć trzy następujące wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-1) \cdot (-1) = 6 - 2 = 4 > 0,$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 0 \cdot 0 = 9 > 0,$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 6 - 1 = 5 > 0.$$

Po sprawdzeniu, że macierz układu równań jest dodatnio określona możemy ją rozłożyć na iloczyn LL^T, gdzie L oznacza macierz trójkątną górną, korzystając z wzorów (4.5) (zob. wykład 8). Ponieważ w naszym przypadku $n = 3$ i macierz jest rzeczywista, więc wzory te mają postać

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$l_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} l_{kj}}{l_{kk}}, \quad i = 2, 3 \text{ dla } k = 1 \text{ oraz } i = 3 \text{ dla } k = 2.$$

Dla $k = 1$ mamy

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{3},$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{0}{\sqrt{3}} = 0.$$

Wykonaliśmy 1 pierwiastkowanie i 2 dzielenia, czyli 3 działania. W przypadku $k = 2$ otrzymujemy

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{2 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{5}{3}},$$

$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31} l_{21}}{l_{22}} = \frac{-1 - 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{5}{3}}} = -\sqrt{\frac{3}{5}}$$

i musieliśmy wykonać 1 pierwiastkowanie, 2 mnożenia, 1 dzielenie i 2 odejmowania, czyli 6 działań. Dla $k = 3$ należy obliczyć

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{3 - 0^2 - \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2} = \sqrt{\frac{12}{5}}.$$

Wykonaliśmy 1 pierwiastkowanie, 2 mnożenia (podniesienie liczby do kwadratu to mnożenie tej liczby przez nią samą) i 2 odejmowania, czyli łącznie 5 działań. W wyniku wykonania powyższych obliczeń otrzymaliśmy macierze

$$L = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{5}{3}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{3}{5}} & \sqrt{\frac{12}{5}} \end{bmatrix} \text{ i } L^T = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{5}{3}} & -\sqrt{\frac{3}{5}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{12}{5}} \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $A = LL^T$, więc aby rozwiązać dany układ równań $Ax = b$, wystarczy rozwiązać dwa następujące układy z macierzami trójkątnymi:

$$Ly = b \text{ i } L^T x = y. \tag{4}$$

Pierwszy z tych układów (z macierzą trójkątną dolną) rozwiązujemy korzystając z wzoru

$$y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k}{l_{ii}}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Mamy

$$y_1 = \frac{b_1}{l_{11}} = \frac{0}{\sqrt{3}} = 0,$$

$$y_2 = \frac{b_2 - l_{21} y_1}{l_{22}} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 0}{\sqrt{\frac{5}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{5}},$$

$$y_3 = \frac{b_3 - l_{31} y_1 - l_{32} y_2}{l_{33}} = \frac{0 - 0 \cdot 0 - \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \cdot \sqrt{\frac{3}{5}}}{\sqrt{\frac{12}{5}}} = \sqrt{\frac{3}{20}}$$

i do obliczenia tych wielkości musieliśmy wykonać 3 dzielenia, 3 mnożenia i 3 odejmowania, czyli łącznie 9 działań. Dalej rozwiązujemy drugi z układów (4) (z macierzą trójkątną górną) korzystając z wzoru

$$x_i = \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^{3} l_{ik}^T x_k}{l_{ii}}, \quad i = 3, 2, 1.$$

Otrzymujemy

$$x_3 = \frac{y_3}{l_{33}} = \frac{\sqrt{\frac{3}{20}}}{\sqrt{\frac{12}{5}}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 5}{12 \cdot 20}} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4} = 0{,}25,$$

$$x_2 = \frac{y_2 - l_{23}^T x_3}{l_{22}} = \frac{\sqrt{\frac{3}{5}} - \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \cdot \frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{5}{3}}} = \frac{\frac{5}{4}\sqrt{\frac{3}{5}}}{\sqrt{\frac{5}{3}}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{4} = 0{,}75,$$

$$x_1 = \frac{y_1 - l_{12}^T x_2 - l_{13}^T x_3}{l_{11}} = \frac{0 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{4} - 0 \cdot \frac{1}{4}}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{4} = -0{,}25.$$

Do obliczenia tych wielkości wykonaliśmy 3 dzielenia, 3 mnożenia i 3 odejmowania, a więc razem 9 działań. Zatem łącznie w metodzie wykonaliśmy 3 pierwiastkowania, 10 dzieleń, 9 mnożeń i 10 odejmowań, co daje łączną liczbę 32 działań. Liczbę tę można otrzymać bezpośrednio z wzoru (4.8) (zob. wykład 8) bez wykonywania wszystkich obliczeń. Mamy bowiem

$$S = \frac{2n^3 + 15n^2 + n}{6} = \frac{2 \cdot 27 + 15 \cdot 9 + 3}{6} = \frac{54 + 135 + 3}{6} = \frac{192}{6} = 32.$$

Uwaga: Dla rozważanego układu równań okazało się, że liczba działań w metodzie eliminacji Gaussa jest mniejsza niż w metodzie Choleskiego. Nie jest tak w ogólnym przypadku. Zgodnie z analizą wykonaną na wykładzie (zob wykład 8 str. 57 – 60), dla $n > 4$ metoda Choleskiego jest efektywniejsza (w naszym przypadku mieliśmy $n = 3$).

Macierz w rozważanym układzie równań jest nie tylko dodatnio określona, ale także trójdiagonalna. Dla układów z taką macierzą można zastosować jeszcze bardziej efektywną metodę (o mniejszej złożoności obliczeniowej), jaką jest metoda Crouta. Zastosowanie tej metody do danego układu równań przedstawiono w przykładzie 4.1 (zob. wykład 8 str. 61 – 62) i okazało się, że wystarczy w niej wykonać tylko 19 działań.