Innym wnioskiem z twierdzenia 3.10 jest

Wniosek 3.2. *Jeśli funkcja f ma ciągłą pochodną rzędu* $n + 1$ *na odcinku* $[a, b]$ *zawierającym węzły rzeczywiste* x_i *(*$i = 0, 1, \ldots, k$*) i punkt x, to istnieje wartość* $\xi \in [a, b]$*, przy czym* $\xi = \xi(x)$*, że*

$$r(x) = \frac{p_{n+1}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi). \tag{3.20}$$

W dowodzie tego wniosku korzysta się z przedstawienia całkowego uogólnionego ilorazu różnicowego, a następnie stosuje się twierdzenie o wartości średniej dla całek.

Wzór (3.20) jest często stosowany w praktyce, gdyż w wielu przypadkach potrafimy z własności rozważanego zagadnienia oszacować pochodną nieznanej funkcji f. Jeśli

$$\left| f^{(n+1)}(x) \right| \le M$$

dla $x \in [a, b]$, to bezpośrednio z wzoru (3.20) mamy

$$\left| r(x) \right| \le \frac{\left| p_{n+1}(x) \right|}{(n+1)!} M.$$

3.7. Interpolacja wymierna

Definicja 3.9. *Zadanie interpolacji wymiernej* polega na znalezieniu dla danej funkcji f funkcji wymiernej W_{mn} postaci

$$W_{mn}(x) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{m} a_k x^k}{\sum\limits_{k=0}^{n} b_k x^k},$$

w której stopień licznika jest równy co najwyżej m, a stopień mianownika – co najwyżej n, spełniającej dla danych węzłów x_i i wartości funkcji w tych węzłach $f(x_i)$ ($i = 0, 1, \ldots, m + n$) warunki

$$W_{mn}(x_i) = f(x_i). \tag{3.20}$$

Zauważmy, że funkcja W_{mn} zawiera $m + n + 2$ współczynniki, podczas gdy warunków postaci (3.20) jest $m + n + 1$. Najczęściej określa się bowiem funkcję W_{mn} z dokładnością do wspólnego czynnika $\varrho \neq 0$.

Z zależności (3.20) mamy

$$\sum_{k=0}^{m} a_k x_i^k - f(x_i) \sum_{k=0}^{n} b_k x_i^k = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m + n. \tag{3.21}$$

Jest to układ równań jednorodnych ze względu na niewiadome współczynniki a_k i b_k. Okazuje się jednak, że zastąpienie zadania interpolacji wymiernej rozwianiem ww. układu nie zawsze prowadzi do rozwiązania.

Przykład 3.7

Niech $m = n = 1$ oraz

i	0	1	2
x_i	0	1	2
$f(x_i)$	1	2	2

Spróbujmy określić funkcję wymierną

$$W_{11}(x) = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x}$$

spełniającą warunki (3.20). Z zależności (3.21) mamy

$$a_0 - b_0 = 0,$$
$$a_0 + a_1 - 2(b_0 + b_1) = 0,$$
$$a_0 + 2a_1 - 2(b_0 + 2b_1) = 0.$$

Rozwiązaniem tego układu z dokładnością do wspólnego czynnika różnego od 0 jest

$$a_0 = 0, \quad b_0 = 0, \quad a_1 = 2, \quad b_1 = 1.$$

Stąd

$$W_{11}(x) = \frac{2x}{x}.$$

Dla $x = 0$ mamy wyrażenie nieokreślone. Jeśli dokonamy redukcji, to otrzymamy funkcję $\widetilde{W}_{11} = 2,$ ale i ta funkcja nie rozwiązuje zagadnienia interpolacji w punkcie $x = 0$, bo mamy $f(0) = 1 \neq \widetilde{W}_{11}(0) = 2.$ ■

Wniosek 3.3. *Zadanie interpolacji wymiernej nie zawsze jest rozwiązalne. Prawie każde rozwiązanie układu* (3.20) *jest rozwiązaniem układu* (3.21)*, ale nie na odwrót.*

W podręczniku [2] są podane zależności pomiędzy rozwiązaniami układów (3.20) i (3.21). W książce tej podano także algorytm interpolacji wymiernej, który odpowiada algorytmowi Neville'a w interpolacji wielomianowej.

3.8. Interpolacja trygonometryczna

Niech będzie dany przedział $[0,\ 2\pi]$ oraz punkty węzłowe $x_k = \dfrac{2k\pi}{n}$ i wartości funkcji w tych węzłach $f(x_k)$ ($k = 0, 1, \ldots, n-1$), przy czym wartości $f(x_k)$ mogą być zespolone.

Definicja 3.10. *Zadanie interpolacji trygonometrycznej* polega na znalezieniu dla danej funkcji okresowej f o okresie 2π wielomianu trygonometrycznego

$$T_n(x) = \beta_0 + \beta_1 \exp(xi) + \beta_2 \exp(2xi) + \ldots + \beta_{n-1} \exp((n-1)xi), \tag{3.22}$$

$\exp(\alpha i) = \cos\alpha + i\sin\alpha$ (wzór Eulera), i oznacza jednostkę urojoną, takiego że

$$T_n(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{3.23}$$

Funkcja f jest funkcją zmiennej rzeczywistej o wartościach zespolonych. Współczynniki β_k w ogólności mogą być liczbami zespolonymi.

Jeżeli dana jest funkcja g o okresie T, tj. $g(y+T) = g(y)$, to dokonując zamiany zmiennej według zależności $x = \frac{2\pi}{T} y$ otrzymamy $f(x) = g\left(\frac{yT}{2\pi}\right)$, a więc funkcję okresową o okresie 2π. Bez zmniejszania ogólności możemy zatem rozważać tylko funkcje o okresie 2π.

Podobnie, jak w przypadku interpolacji wielomianowej, możemy udowodnić

Twierdzenie 3.9. *Dla dowolnych liczb zespolonych $f(x_k)$ i rzeczywistych węzłów $x_k = \frac{2k\pi}{n}$ ($k = 0, 1, \ldots, n-1$), gdzie liczba n jest ustalona, istnieje dokładnie jeden wielomian trygonometryczny* (3.22) *spełniający warunki* (3.23).

Dowód. Podstawiając $w = \exp(xi)$ z wzoru (3.22) otrzymujemy

$$T_n(w) = \beta_0 + \beta_1 w + \ldots + \beta_{n-1} w^{n-1}$$

i zagadnienie interpolacji trygonometrycznej sprowadza się do zagadnienia interpolacyjnego Lagrange'a znalezienia wielomianu stopnia $n-1$, gdyż

$$w_k = \exp(x_k i) = \exp\left(\frac{2k\pi i}{n}\right) \quad \Rightarrow \quad w_j \neq w_k \quad \text{dla} \quad j \neq k \quad \text{i} \quad 0 \leq j, k \leq n-1. \qquad \blacksquare$$

W kolejnym twierdzeniu podano wzory na współczynniki β_k wielomianu (3.22).

Twierdzenie 3.10. *Jeżeli dla wielomianu trygonometrycznego* (3.22) *zachodzą zależności* (3.23)*, to*

$$\beta_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \exp\left(-\frac{2\pi jki}{n}\right), \quad j = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{3.24}$$

Dowód. Oznaczmy $w_k = \exp(x_k i)$. Pokażemy najpierw, że

a) $w_k^j = w_j^k$ dla liczb całkowitych j oraz k,

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} w_k^j w_k^{-h} = \begin{cases} n, & \text{dla } j = h, \\ 0, & \text{dla } j \neq h, \end{cases}$ gdzie $0 \leq j, h \leq n-1$.

Równość a) jest oczywista, gdyż wynika z definicji liczb w_k. W celu udowodnienia zależności b) zauważmy, że dla $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, liczba w_k jest pierwiastkiem równania

$$w^n - 1 = (w-1)(w^{n-1} + w^{n-2} + \ldots + 1) = 0.$$

Zatem $w_k \neq 1$ dla wszystkich $k \neq 0, \pm n, \pm 2n, \ldots$. Mamy

$$\sum_{k=0}^{n-1} w_k^j = \begin{cases} n, & \text{dla } k = 0, \pm n, \pm 2n, \ldots, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

a stąd otrzymujemy zależność b).

Jeżeli w przestrzeni $\mathbf{C}^n$ zawierającej wszystkie wektory $f = (f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_{n-1}))$ określimy iloczyn skalarny

$$(f, g) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f_j \overline{g}_j,$$

gdzie $\overline{g}_j$ oznacza sprzężenie liczby g_j, to własności a) i b) oznaczają, że przyporządkowane funkcji $\exp(jxi)$ specjalne układy n liczb

$$w_j = (w_0^j, w_1^j, \ldots, w_{n-1}^j), \quad j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

tworzą bazę ortonormalną w przestrzeni $\mathbf{C}^n$, tj.

$$(w_j, w_h) = \begin{cases} 1, & \text{dla } j = h, \\ 0, & \text{dla } j \neq h, \end{cases} \quad 0 \le j, h \le n-1. \tag{3.25}$$

Ponieważ $T_n(x_k) = f(x_k)$, więc z uwagi na zależność (3.25) mamy

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) w_k^{-j} = (f, w_j) = (\beta_0 w_0 + \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_{n-1} w_{n-1}, w_j) = \beta_j. \qquad \blacksquare$$

Niech teraz wartości $f(x_k)$ będą rzeczywiste. Oznaczmy

$$A_j = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\cos\frac{2\pi jk}{n}, \quad B_j = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\sin\frac{2\pi jk}{n}, \tag{3.26}$$

gdzie j oznacza liczbę całkowitą. Z wzoru (3.24) wynika, że

$$\beta_{n-j} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) w_k^{j-n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) w_k^j, \quad \text{bo } w_k^{-n} = \frac{1}{\exp(2k\pi i)} = 1,$$

$$\beta_j = \frac{1}{2}(A_j - iB_j), \quad \beta_{n-j} = \frac{1}{2}(A_j + iB_j),$$

$$\beta_j w_k^j + \beta_{n-j} w_k^{n-j} = A_j \cos jx_k + B_j \sin jx_k, \quad \text{bo } \beta_n = \beta_0, \tag{3.27}$$

$$\beta_j w_k^j = \frac{1}{2}(A_j - iB_j)\exp(ijx_k) = \frac{1}{2}(A_j - iB_j)(\cos jx_k + i\sin jx_k),$$

$$\beta_{n-j} w_k^{n-j} = \frac{1}{2}(A_j + iB_j)\exp(-ijx_k) = \frac{1}{2}(A_j + iB_j)(\cos jx_k - i\sin jx_k),$$

$$j = 0, 1, \ldots, n.$$

Możemy teraz udowodnić twierdzenie o interpolacji rzeczywistymi wielomianami trygonometrycznymi.

Twierdzenie 3.11. *Dla danych punktów węzłowych* $x_k = \dfrac{2\pi k}{n}$ *i rzeczywistych wartości funkcji w tych węzłach* $f(x_k)$ *istnieje dokładnie jeden wielomian trygonometryczny o własności* $T_n(x_k) = f(x_k)$*, przy czym dla* n *parzystego* ($n = 2m$)

$$T_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} (A_k \cos kx + B_k \sin kx) + \frac{A_m}{2} \cos mx, \tag{3.28}$$

a dla n *nieparzystego* ($n = 2m + 1$)

$$T_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} (A_k \cos kx + B_k \sin kx). \tag{3.29}$$

Dowód. Istnienie i jednoznaczność wielomianów (3.28) i (3.29) wynika z twierdzenia 3.9. Dla $n = 2m$ z wzorów (3.22), (3.24), (3.26) i (3.27) mamy

$$\begin{aligned} f(x_k) = T_n(x_k) &= \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j \exp(jix_k) = \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j w_k^j \\ &= \beta_0 + \sum_{j=1}^{m-1} (\beta_j w_k^j + \beta_{n-j} w_k^{n-j}) + \beta_m w_k^m \\ &= \frac{1}{2}(A_0 - iB_0) + \sum_{j=1}^{m-1} (A_j \cos jx_k + B_j \sin jx_k) + \frac{1}{2}(A_m - iB_m) w_k^m. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Z zależności (3.26) otrzymujemy

$$B_0 = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \sin \frac{2k\pi \cdot 0}{n} = 0,$$

$$B_m = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \sin \frac{2k\pi \cdot m}{n} = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \sin k\pi = 0,$$

$$w_k^m = \exp(imx_k) = \cos mx_k + i \sin mx_k = \cos mx_k,$$

bo

$$\sin mx_k = \sin m \frac{2k\pi}{n} = \sin k\pi = 0$$

i dlatego wzór (3.30) daje zależność (3.28) dla $x = x_k$. Gdy liczba n jest nieparzysta dowód przebiega podobnie. ■

3.9. Interpolacja funkcjami sklejanymi

W dotychczas rozpatrywanych zagadnieniach interpolacji wielomianowej zakładaliśmy, że dana funkcja jest przybliżana jednym wielomianem na całym odcinku $[a, b] = [x_0, x_n]$. Jedyną możliwością uzyskania lepszego przybliżenia było zwiększenie stopnia wielomianu. Wiadomo jednak, że nawet dla bardzo regularnych funkcji ciąg wielomianów interpolacyjnych nie musi być zbieżny do interpolowanej funkcji. Dlatego do zagadnienia tego podchodzi się w inny sposób. Dzielimy cały przedział $[a, b]$ na N części i w każdym z podprzedziałów przybliżamy funkcję wielomianem ustalonego (możliwie niskiego) stopnia. Istotne jest przy tym, aby tak skonstruowane przybliżenie było ciągłe wraz z pochodnymi odpowiednich rzędów na całym odcinku $[a, b]$. Funkcje o tej własności nazywają się funkcjami sklejanymi.

Definicja 3.11. Funkcję rzeczywistą S nazywamy *funkcją sklejaną stopnia m* z węzłami

$$\Delta\colon a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

jeśli

a) w każdym przedziale (x_{i-1}, x_i) dla $i = 0, 1, \ldots, n + 1$, przy czym przyjmujemy $x_{-1} = -\infty$, $x_{n+1} = +\infty$, funkcja S jest wielomianem stopnia nie wyższego niż m,

b) funkcja S i jej pochodne rzędu $1, 2, \ldots, m - 1$ są ciągłe na całej osi rzeczywistej.

Zauważmy, że gdy $m = 1$, to funkcja sklejana jest łamaną. Wśród funkcji sklejanych specjalną rolę (zob. dalej) spełniają pewne ich klasy.

Definicja 3.12. Funkcję sklejaną S stopnia $2m - 1$ z węzłami Δ nazywamy *naturalną funkcją sklejaną*, gdy w przedziałach $(-\infty, x_0)$ i $(x_n, +\infty)$ dana jest wielomianem stopnia $m - 1$ (a nie $2m - 1$).

Definicja 3.13. Funkcję sklejaną S stopnia m z węzłami Δ nazywamy *okresową funkcją sklejaną* o okresie $b - a$, gdy $S^{(i)}(a+0) = S^{(i)}(b-0)$ dla $i = 0, 1, \ldots, m - 1$.

W dalszym ciągu przyjmiemy następujące oznaczenia:

$S_m(\Delta)$ – klasa funkcji sklejanych stopnia m z węzłami Δ,
$P_m(\Delta)$ – klasa okresowych funkcji sklejanych stopnia m z węzłami Δ,
$N_{2m-1}(\Delta)$ – klasa naturalnych funkcji sklejanych stopnia $2m - 1$ z węzłami Δ.

Definicja 3.14. *Zadanie interpolacji funkcjami sklejanymi* polega na znalezieniu dla danych punktów $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, \ldots, n$, funkcji sklejanej S, takiej że

$$S(x_i) = f(x_i). \tag{3.31}$$

W całej klasie $S_m(\Delta)$ zadanie to nie ma jednoznacznego rozwiązania, natomiast w klasach $P_m(\Delta)$ i $N_{2m-1}(\Delta)$ istnieje dokładnie jedna funkcja sklejana S spełniająca warunki (3.31) (dowód tego twierdzenia znajduje się m. in. w [1]).

Poniżej podajemy algorytm wyznaczania naturalnej i okresowej funkcji sklejanej stopnia trzeciego. Taką funkcję najczęściej stosuje się w praktyce. Zakładamy zatem, że

$$S(x) = a_i + b_i t + c_i t^2 + d_i t^3, \tag{3.32}$$

gdzie $t = x - x_i$ dla $x \in [x_i, x_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, $S \in N_3(\Delta)$ lub $S \in P_3(\Delta)$ oraz $S(x_i) = f(x_i)$ w węzłach Δ.

Z wzoru (3.32) wynika, że należy wyznaczyć $4n$ współczynników (jeśli przedział $[a, b]$ jest podzielony na n podprzedziałów). Z warunków interpolacji (3.31) oraz z określenia funkcji S wzorem (3.32) otrzymujemy

$$a_i = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \tag{3.33}$$

gdyż dla $x = x_i$ mamy $t = 0$. Należy zatem jeszcze wyznaczyć $3n$ współczynników. $3n - 3$ równania na te współczynniki otrzymamy z założenia ciągłości funkcji S, S' i S'' w węzłach x_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$), a pozostałe równania z faktu, że funkcja S jest naturalną lub okresową funkcją sklejaną.

Z określenia (3.32) funkcji S mamy

$$S''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_i) \text{ dla } x \in [x_i, x_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Z ciągłości funkcji S'' w węzłach x_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$), czyli z warunku

$$S''(x_i + 0) = S''(x_i - 0),$$

otrzymujemy

$$2c_i + 6d_i(x - x_i)\Big|_{x = x_i} = 2c_{i-1} + 6d_{i-1}(x - x_{i-1})\Big|_{x = x_i},$$

czyli

$$2c_i = 2c_{i-1} + 6d_{i-1}(x_i - x_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \tag{3.34}$$

Obliczając pochodną funkcji S z wzoru (3.32) mamy

$$S'(x) = b_i + 2c_i(x - x_i) + 3d_i(x - x_i)^2$$

i z warunku ciągłości funkcji S' w węzłach x_i, tj. z warunku

$$S'(x_i + 0) = S'(x_i - 0),$$

mamy

$$b_i + 2c_i(x - x_i) + 3d_i(x - x_i)^2\Big|_{x=x_i} = b_{i-1} + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2\Big|_{x=x_i},$$

a więc

$$b_i = b_{i-1} + 2c_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + 3d_{i-1}(x_i - x_{i-1})^2, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \tag{3.35}$$

Postępując dalej podobnie, z ciągłości funkcji S w węzłach x_i otrzymamy równania

$$a_i = a_{i-1} + b_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + c_{i-1}(x_i - x_{i-1})^2 + d_{i-1}(x_i - x_{i-1})^3, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \tag{3.36}$$

Z zależności (3.34) wyznaczamy d_{i-1}:

$$d_{i-1} = \frac{c_i - c_{i-1}}{3h_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \tag{3.37}$$

gdzie przyjęto oznaczenie $h_{i-1} = x_i - x_{i-1}$, po czym podstawiamy te wartości do wzorów (3.35) i (3.36) uwzględniając warunki (3.33). Otrzymujemy

$$b_i = b_{i-1} + 2c_{i-1}h_{i-1} + (c_i - c_{i-1})h_{i-1},$$
$$f_i = f_{i-1} + b_{i-1}h_{i-1} + c_{i-1}h_{i-1}^2 + \frac{1}{3}(c_i - c_{i-1})h_{i-1}^2,$$

czyli

$$b_i = b_{i-1} + (c_i + c_{i-1})h_{i-1},$$
$$f_i = f_{i-1} + b_{i-1}h_{i-1} + \frac{1}{3}(c_i + 2c_{i-1})h_{i-1}^2,$$

gdzie dla prostoty oznaczyliśmy $f_i = f(x_i)$. Z drugiego z powyższych równań możemy obliczyć b_{i-1}. Mamy

$$b_{i-1} = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{h_{i-1}}{3}(c_i + 2c_{i-1}), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{3.38}$$

i po podstawieniu do pierwszego równania dostajemy

$$b_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{h_{i-1}}{3}(2c_i + c_{i-1}), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{3.39}$$

Równanie (3.38) możemy także zapisać następująco:

$$b_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{h_i}{3}(c_{i+1} + 2c_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n-2. \tag{3.40}$$

Dla $i = 1, 2, \ldots, n-2$ z równań (3.39) i (3.40) otrzymujemy

$$\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{h_i}{3}(c_{i+1} + 2c_i) = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{h_{i-1}}{3}(2c_i + c_{i-1}),$$

czyli

$$\frac{h_{i-1}}{3}c_{i-1} + \frac{2(h_i + h_{i-1})}{3}c_i + \frac{h_i}{3}c_{i+1} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-2. \tag{3.41}$$

Jest to układ $n-2$ równań z n niewiadomymi $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$.

Warunek

$$S''(x_i + 0) = S''(x_i - 0)$$

musi zachodzić także w punkcie $x_i = b$, czyli w punkcie x_n, a stąd (por. wzór (3.34))

$$2c_n = S''(x_n - 0).$$

Rozumując jak poprzednio dostaniemy (por. wzory (3.37) i (3.38))

$$\begin{aligned} d_{n-1} &= \frac{c_n - c_{n-1}}{3h_{n-1}}, \\ b_{n-1} &= \frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{h_{n-1}}{3}(c_n + 2c_{n-1}), \end{aligned} \tag{3.42}$$

a więc układ (3.41) zachodzi dla $i = 1, 2, \ldots, n-1$ (z $n+1$ niewiadomymi $c_0, c_1, \ldots, c_n$). Po prostych przekształceniach możemy go zapisać w postaci

$$\frac{h_i}{h_i + h_{i-1}} c_{i+1} + 2c_i + \frac{h_{i-1}}{h_i + h_{i-1}} c_{i-1} = \frac{3}{h_i + h_{i-1}} \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} \right), \tag{3.43}$$
$$i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Jeżeli funkcja S jest naturalną funkcją sklejaną, to poza przedziałem $[a, b]$ jest ona wielomianem stopnia $m-1$, a w przedziale $[a, b]$ – stopnia $2m-1$. W naszym przypadku $2m-1=3$, a stąd $m=2$. Oznacza to, że w przedziałach $(-\infty, a)$ i $(b, +\infty)$ funkcja S jest wielomianem stopnia pierwszego, a stąd $S''(x) = 0$ dla $x \notin [a, b]$. Z drugiej strony funkcja S'' musi być ciągła w punktach $x_0 = a$ i $x_n = b$, czyli $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$. Zatem $c_0 = 0$, bo $S''(x) = 2c_0 + 6d_0(x - x_0)$ dla $x \in [x_0, x_1)$ oraz $c_n = 0$ z warunku $2c_n = S''(x_n - 0)$. Układ (3.43) przyjmuje więc postać

$$\begin{bmatrix} 2 & w_1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ u_2 & 2 & w_2 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & u_3 & 2 & w_3 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & u_{n-2} & 2 & w_{n-2} \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & u_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{bmatrix},$$

gdzie

$$w_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-2,$$
$$u_i = \frac{h_{i-1}}{h_i + h_{i-1}}, \quad i = 2, 3, \ldots, n-1,$$
$$v_i = \frac{3}{h_i + h_{i-1}} \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Macierz tego układu jest trójprzekątniowa. Sposób rozwiązania układu równań liniowych z taką macierzą jest podany w p. 4.4.

Jeśli funkcja S jest okresową funkcją sklejaną stopnia trzeciego, to muszą być spełnione warunki

$$S^{(i)}(x_0 + 0) = S^{(i)}(x_n - 0) \text{ dla } i = 0, 1, 2,$$

a stąd dla $i = 0$ otrzymujemy

$$f(x_0) = f(x_n),$$

a więc warunek, jaki powinna spełniać funkcja f w interpolacji funkcją okresową. Dla $i = 1$ mamy

$$b_0 + 2c_0(x - x_0) + 3d_0(x - x_0)^2 \Big|_{x=x_0} = b_{n-1} + 2c_{n-1}(x - x_{n-1}) + 3d_{n-1}(x - x_{n-1})^2 \Big|_{x=x_n},$$

czyli

$$b_0 = b_{n-1} + 2c_{n-1}h_{n-1} + 3d_{n-1}h_{n-1}^2. \tag{3.44}$$

Wreszcie, dla $i = 2$ otrzymujemy $c_0 = c_n$.

Z zależności (3.44) po uwzględnieniu równań (3.38) i (3.42) mamy

$$\frac{f_1 - f_0}{h_0} - \frac{h_0}{3}(c_1 + 2c_0) = \frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{h_{n-1}}{3}(c_n + 2c_{n-1}) + 2c_{n-1}h_{n-1} + (c_n - c_{n-1})h_{n-1}.$$

Stąd, uwzględniając, że $c_0 = c_n$, po prostych przekształceniach otrzymujemy

$$\frac{h_0}{h_0 + h_{n-1}} c_1 + \frac{h_{n-1}}{h_0 + h_{n-1}} c_{n-1} + 2c_n = \frac{3}{h_0 + h_{n-1}}\left(\frac{f_1 - f_0}{h_0} - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}}\right). \tag{3.45}$$

Równania (3.43) i wzór (3.45) prowadzą do układu n równań liniowych z n niewiadomymi c_1, c_2, ... , c_n postaci

$$\begin{bmatrix} 2 & w_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & u_1 \\ u_2 & 2 & w_2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & u_3 & 2 & w_3 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & u_{n-1} & 2 & w_{n-1} \\ w_n & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & u_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{bmatrix},$$

gdzie

$$w_n = \frac{h_0}{h_0 + h_{n-1}}, \quad u_n = \frac{h_{n-1}}{h_0 + h_{n-1}},$$
$$v_n = \frac{3}{h_0 + h_{n-1}}\left(\frac{f_1 - f_0}{h_0} - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}}\right),$$

a pozostałe wielkości w_i, u_i i v_i ($i = 1, 2, \dots , n - 1$) są określone jak poprzednio.

Korzystając z obliczonych współczynników c_i funkcję S możemy przedstawić w postaci

$$S(x) = f_i + \left[\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{h_i}{3}(c_{i+1} + 2c_i)\right](x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}(x - x_i)^3,$$
$$x \in [x_i, x_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots , n - 1.$$

Błąd interpolacji funkcjami sklejanymi jest określony w poniższych twierdzeniach.

Twierdzenie 3.12. *Jeśli funkcja f spełnia warunek Höldera, tzn. istnieją stałe* $L > 0$ *i* $\alpha \in (0, 1]$, *takie że dla dowolnych* $x, y \in [a, b]$ *mamy*

$$|f(x) - f(y)| \le L|x - y|^{\alpha},$$

to

$$\max_{x \in [a,b]} |S(x) - f(x)| \le 2L\left[1 + 4\max_{i,j}\left(\frac{h_i}{h_j}\right)^2\right]\max_j h_j^{\alpha}. \tag{3.46}$$

Dowód tego twierdzenia znajduje się w [1]. Zauważmy, że z wzoru (3.46) wynika, że jeśli chcemy, aby oszacowanie błędu było rzędu $\max_i h_i^\alpha$, to wielkość $\max_{i,j}\left(\frac{h_i}{h_j}\right)^2$ powinna być w przybliżeniu równa 1. Oznacza to, że węzły powinny być rozłożone w miarę równomiernie. Założenie to nie jest konieczne dla bardziej regularnej funkcji. Mamy bowiem

Twierdzenie 3.13. *Jeżeli $f \in C^{(2)}[a, b]$, to*

$$\max_{x\in[a,b]} \left| S(x) - f(x) \right| \le 5M_2 \max_i h_i^2,$$

gdzie

$$M_2 = \max_{x\in[a,b]} \left| f''(x) \right|.$$

Dowód tego twierdzenia też znajduje się w [1].

Zadania

1. Znaleźć wielomian interpolacyjny Lagrange'a, który w punktach $-2, 1, 2, 4$ przyjmuje wartości odpowiednio $3, 1, -3, 8$. Jaka jest wartość tego wielomianu w punkcie $x = 0$?
2. Znaleźć wielomian interpolacyjny Lagrange'a, który w punktach 0, 1, 2 przyjmuje wartości odpowiednio 1, 1, 3. Obliczyć wartość tego wielomianu w punkcie $x = 1/2$.
3. Dla danych z zadania 2 znaleźć wartość wielomianu interpolacyjnego w punkcie $x = 1/2$ stosując algorytm Neville'a.
4. Dla danych z zadania 2 znaleźć wielomian interpolacyjny stosując wzór interpolacyjny Newtona.
5. Napisać wzór interpolacyjny Newtona dla funkcji $f(x)$ i następujących danych: $f(0) = 1$, $f(2) = 3$, $f(3) = 2$, $f(4) = 5$, $f(6) = 7$.
6. Udowodnić, że jeżeli
$$f(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_p),$$
to
$$[x_0, x_1, \dots, x_n; f] = 0 \ \text{ dla } n \le p.$$
Jaka jest wartość tego ilorazu różnicowego, gdy $n = p. + 1$?
7. Obliczyć różnice progresywne wielomianu
$$W_4(x) = x^4 - x - 1$$
przyjmując $h = 1$.
8. Znaleźć różnice wsteczne wielomianu $W_4(x)$ z zadania 6.
9. Udowodnić, że jeśli $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, \dots, k$, to

$$[x_0, x_1, \ldots, x_k; f] = \frac{\Delta^k f(x_0)}{k!h^k}.$$

10. Pokazać, że

$$\delta^2 f(x) = (\Delta - \nabla) f(x).$$

11. Udowodnić, że

$$\Delta(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \Delta f(x) + \beta \Delta g(x).$$

12. Korzystając z przedstawienia wielomianu interpolacyjnego za pomocą różnic progresywnych znaleźć ten wielomian, gdy $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, $f(2) = 2$ i $f(3) = 3$.

13. Dla danych z zadania 12 znaleźć wielomian interpolacyjny korzystając jego przedstawienia za pomocą różnic wstecznych.

14. Dane są punkty x_i ($i = 0, 1, 2$) o krotnościach m_i oraz wartościach funkcji f i jej pochodnych w tych punktach:

i	0	1	2
x_i	0	1	2
m_i	1	2	3
$f(x_i)$	0	1	0
$f'(x_i)$	–	2	1
$f''(x_i)$	–	–	2

Skonstruować wielomian interpolacyjny Hermite'a posługując się wzorami (3.15) na współczynniki.

15. Dla danych z zadania 14 wyznaczyć współczynniki wielomianu interpolacyjnego Hermite'a korzystając z uogólnionych ilorazów różnicowych.

16. Z jaką dokładnością można obliczyć ln(100,5) przy użyciu wzoru interpolacyjnego Lagrange'a, jeżeli dane są wartości ln(100), ln(101), ln(102) i ln(103).

17. Udowodnić, że jeśli funkcja g interpoluje funkcję f w węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, a funkcja h interpoluje funkcję f w węzłach $x_1, x_2, \ldots, x_n$, to funkcja

$$g(x) + \frac{x_0 - x}{x_n - x_0}[g(x) - h(x)]$$

interpoluje funkcję f we wszystkich węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (funkcje g i h nie muszą być wielomianami).

18. Udowodnić, że jeśli funkcja g (wielomian lub nie) interpoluje funkcję f w węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, a funkcja h jest funkcją taką, że $h(x_i) = \delta_{in}$ $(0 \le i \le n)$, to istnieje stała c, dla której funkcja $g + ch$ interpoluje funkcję f w punktach $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

19. Wielomian

$$p(x) = 2 - (x+1) + \pi(x+1) - 2\pi(x+1)(x-1)$$

interpoluje cztery początkowe punkty z tablicy

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	2	1	2	-7	10

Dodając do wielomianu p jeden składnik, wyznaczyć wielomian interpolujący wszystkie dane.

20. Dla jakich wartości a, b i c funkcja

$$S(x) = \begin{cases} x^3, & x \in [0, 1), \\ \dfrac{1}{2}(x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c, & x \in [1, 3), \end{cases}$$

może być w przedziale $[0, 3)$ naturalną funkcją sklejaną stopnia trzeciego?

21. Dla jakich wartości parametrów a, b, c i d funkcja

$$S(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & x \in (-\infty, -3), \\ a + bx + cx^2 + dx^3, & x \in [-3, 4), \\ 157 - 32x, & x \in [4, \infty), \end{cases}$$

jest funkcją sklejaną stopnia trzeciego?

22. Dla jakich wartości parametrów a i b funkcja

$$S(x) = \begin{cases} (x-2)^3 + a(x-1)^2, & x \in (-\infty, 2), \\ (x-2)^3 - (x-3)^2, & x \in [2, 3), \\ (x-3)^3 + b(x-2)^2, & x \in [3, \infty), \end{cases}$$

jest funkcją sklejaną stopnia trzeciego?

23. Dla jakich wartości parametrów a, b, c i d funkcja

$$S(x) = \begin{cases} x^3, & x \in [-1, 0), \\ a + bx + cx^2 + dx^3, & x \in [0, 1), \end{cases}$$

może być w przedziale $[-1, 1)$ naturalną funkcją sklejaną stopnia trzeciego?