Elementy analizy numerycznej

wykład 6

zadania

str. 50 zad. 20

Podana w zadaniu funkcja będzie naturalną funkcją sklejaną o ile poza przedziałem interpolacji, tj. [0, 3], będzie wielomianem stopnia pierwszego (zob. wykład 6 definicja 3.12). Zatem „pełna" definicja funkcji $S(x)$ jest następująca:

$$S(x) = \begin{cases} dx + e, \ x \in (-\infty, 0), \\ x^3, \ x \in [0, 1), \\ \frac{1}{2}(x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c, \ x \in [1, 3), \\ fx + g, \ x \in [3, +\infty). \end{cases} \tag{1}$$

Oprócz szukanych w zadaniu wartości a, b i c, trzeba także wyznaczyć wartości d, e, f i g, przy czym warunek, że poza przedziałem interpolacji funkcja powinna być wielomianem stopnia pierwszego powoduje, że wartości d i f powinny być różne od zera. Na podstawie punktu b) definicji funkcji sklejanej (zob. wykład 6 definicja 3.11) funkcja S i jej pochodne rzędu pierwszego i drugiego powinny być ciągłe na całej osi rzeczywistej. Wewnątrz każdego z przedziałów warunki te są oczywiście spełnione, gdyż w każdym z przedziałów funkcja S jest wielomianem. Wystarczy zatem, by

$$\begin{gathered} S(x_i - 0) = S(x_i + 0), \\ S'(x_i - 0) = S'(x_i + 0), \\ S''(x_i - 0) = S''(x_i + 0), \\ i = 0, 1, 2, \end{gathered} \tag{2}$$

przy czym symbol „−0" oznacza wartość z lewej strony, „+0" – wartość z prawej strony oraz $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ i $x_2 = 3$. Dla funkcji (1) warunki (2) dają następujące równania:

$$\begin{aligned} & dx_0 + f = x_0^3, \\ & d = 3x_0^2, \\ & 0 = 6x_0, \\ & x_1^3 = \frac{1}{2}(x_1 - 1)^3 + a(x_1 - 1)^2 + b(x_1 - 1) + c, \\ & 3x_1^2 = \frac{3}{2}(x_1 - 1)^2 + 2a(x_1 - 1) + b, \\ & 6x_1 = 3(x_1 - 1) + 2a, \\ & \frac{1}{2}(x_2 - 1)^3 + a(x_2 - 1)^2 + b(x_2 - 1) + c = fx_2 + g, \end{aligned}$$

$$\frac{3}{2}(x_2-1)^2+2a(x_2-1)+b=f,$$
$$3(x_2-1)+2a=0,$$

skąd po podstawieniu danych wartości x_i ($i = 0, 1, 2$) otrzymujemy

$$f=0,$$
$$d=0,$$
$$0=0,$$
$$1=c,$$
$$3=b,$$
$$6=2a,$$
$$4+4a+2b+c=3f+g,$$
$$6+4a+b=f,$$
$$6+2a=0.$$

Z pierwszych dwóch równań wynika, że w przedziale $(-\infty, 0)$ mamy $S(x) = 0$, a to jest sprzeczne z tym, że w przedziale tym funkcja sklejana powinna być wielomianem stopnia pierwszego (funkcją liniową). Zatem odpowiedź w zadaniu jest następująca: nie istnieją wartości a, b i c, dla których podana funkcja byłaby naturalną funkcją sklejaną stopnia trzeciego.

str. 50 zad. 21

Z podanej w zadaniu postaci funkcji $S(x)$ widać, że o ile jest to funkcja sklejana, to jest to naturalna funkcja sklejana stopnia trzeciego. Szukane wartości parametrów a, b, c i d możemy określić z warunków ciągłości funkcji i jej pochodnych rzędu pierwszego i drugiego w węzłach interpolacji, czyli w punktach $x_0 = -3$ i $x_1 = 4$. Otrzymujemy stąd następujące równania:

$$1-2x_0=a+bx_0+cx_0^2+dx_0^3,$$
$$-2=b+2cx_0+3dx_0^2,$$
$$0=2c+6dx_0,$$
$$a+bx_1+cx_1^2+dx_1^3=157-32x_1,$$
$$b+2cx_1+3dx_1^2=-32,$$
$$2c+6dx_1=0,$$

skąd uwzględniając podane wartości x_i ($i = 0, 1$) mamy

$$7=a-3b+9c-27d,$$
$$-2=b-6c+27d,$$
$$0=2c-18d,$$
$$a+4b+16c+64d=29,$$
$$b+8c+48d=-32,$$
$$2c+24d=0.$$

Z trzeciego i ostatniego równania wynika, że $c = d = 0$. Podstawiając te wartości do pozostałych czterech równań otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&7 = a - 3b,\\
&-2 = b,\\
&a + 4b = 29,\\
&b = -32.
\end{aligned}$$

Drugie równanie jest sprzeczne z ostatnim. Zatem odpowiedź w zadaniu brzmi: <u>nie istnieją parametry a, b, c i d</u>, dla których podana funkcja byłaby funkcją sklejaną stopnia trzeciego.

str. 50 zad. 22

Z warunków ciągłości funkcji sklejanej i jej pochodnych rzędu pierwszego i drugiego wynikają następujące równania:

$$\begin{aligned}
&(x_0 - 2)^3 + a(x-1)^2 = (x_0 - 2)^3 - (x_0 - 3)^2,\\
&3(x_0 - 2)^2 + 2a(x_0 - 1) = 3(x_0 - 2)^2 - 2(x_0 - 3),\\
&6(x_0 - 2) + 2a = 6(x_0 - 2) - 2,\\
&(x_1 - 2)^3 - (x_1 - 3)^2 = (x_1 - 3)^3 + b(x_1 - 2)^2,\\
&3(x_1 - 2)^2 - 2(x_1 - 3) = 3(x_1 - 3)^2 + 2b(x_1 - 2),\\
&6(x_1 - 2) - 2 = 6(x_1 - 3) + 2b,
\end{aligned} \tag{3}$$

gdzie $x_0 = 2$ i $x_1 = 3$. Po podstawieniu tych wartości do równań (3) mamy

$$\begin{aligned}
&a = -1,\\
&2a = 2,\\
&2a = -2,\\
&1 = b,\\
&3 = 2b,\\
&4 = 2b.
\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy równania sprzeczne zarówno z uwagi na parametr a, jak i parametr b. Zatem <u>nie istnieją parametry a i b</u>, dla których podana funkcja byłaby funkcją sklejaną stopnia trzeciego.

str. 50 zad. 23

Ponieważ chodzi o naturalną funkcję sklejaną, więc podaną w zadaniu funkcję należy dookreślić w przedziałach $(-\infty, -1)$ i $[1, +\infty)$. Szukana funkcja ma postać

$$S(x) = \begin{cases} ex + f, & x \in (-\infty, -1), \\ x^3, & x \in [-1, 0), \\ a + bx + cx^2 + dx^3, & x \in [0, 1), \\ gx + h, & x \in [1, +\infty). \end{cases}$$

Warunki ciągłości tej funkcji i jej pochodnych rzędu pierwszego i drugiego w węzłach prowadzą do równań

$$
\begin{aligned}
&ex_0 + f = x_0^3,\\
&e = 3x_0^2,\\
&0 = 6x_0,\\
&x_1^3 = a + bx_1 + cx_1^2 + dx_1^3,\\
&3x_1^2 = b + 2cx_1 + 3dx_1^2,\\
&6x_1 = 2c + 6dx_1,\\
&a + bx_2 + cx_2^2 + dx_2^3 = gx_2 + h,\\
&b + 2cx_2 + 3dx_2^2 = g,\\
&2c + 6dx_2 = 0,
\end{aligned}
$$

gdzie $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$. Jeśli podstawimy podaną wartość x_0 do trzeciego z powyższych równań, to otrzymamy równanie sprzeczne i dalsza analiza tych równań nie jest potrzebna. Zatem nie istnieją parametry a, b, c i d, dla których funkcja $S(x)$ byłaby naturalną funkcją sklejaną stopnia trzeciego.

W żadnym z powyższych zadań nie udało się nam wyznaczyć parametrów, by otrzymać funkcję sklejaną stopnia trzeciego. Nie należy jednak tego spostrzeżenia uogólniać. Rozważmy funkcję określoną następująco:

$$
S(x) = \begin{cases} 1 + ax + bx^2 + cx^3, & x \in (-\infty, 2),\\ d + ex + fx^2 + x^3, & x \in [2, 3),\\ 1 + 2x + 3x^2 + x^3, & x \in [3, +\infty) \end{cases}
$$

i spróbujmy wyznaczyć występujące tu parametry tak, by była to funkcja sklejana stopnia trzeciego. Z warunku ciągłości funkcji S(x) i jej pochodnych do rzędu drugiego w węzłach otrzymujemy następujące równania:

$$
\begin{aligned}
&1 + ax_0 + bx_0^2 + cx_0^3 = d + ex_0 + fx_0^2 + x_0^3,\\
&a + 2bx_0 + 3cx_0^2 = e + 2fx_0 + 3x_0^2,\\
&2b + 6cx_0 = 2f + 6x_0,\\
&d + ex_1 + fx_1^2 + x_1^3 = 1 + 2x_1 + 3x_1^2 + x_1^3,\\
&e + 2fx_1 + 3x_1^2 = 2 + 6x_1 + 3x_1^2,\\
&2f + 6x_1 = 6 + 6x_1,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

gdzie $x_0 = 2$ i $x_1 = 3$. Po podstawieniu tych wartości do równań (4) mamy

$$\begin{aligned}
&1 + 2a + 4b + 8c = d + 2e + 4f + 8,\\
&a + 4b + 12c = e + 4f + 12,\\
&2b + 12c = 2f + 12,\\
&d + 3e + 9f + 27 = 61,\\
&e + 6f + 27 = 47,\\
&2f + 18 = 24.
\end{aligned} \tag{5}$$

Rozważmy najpierw trzy ostatnie równania, tj.

$$\begin{aligned}
&d + 3e + 9f = 34,\\
&e + 6f = 20,\\
&2f = 6.
\end{aligned}$$

Z ostatniego równania mamy $f = 3$ i po podstawieniu do drugiego równania otrzymujemy $e = 2$. Podstawiając te wartości do pierwszego z powyższych równań dostajemy $d = 1$. Uwzględniając te wyniki w pierwszych trzech równaniach (50 mamy

$$\begin{aligned}
&2a + 4b + 8c = 24,\\
&a + 3b + 12c = 26,\\
&2b + 12c = 18.
\end{aligned}$$

Rozwiązaniem tego układu jest $a = 14$, $b = -6$, $c = 5/2$. Szukana funkcja sklejana stopnia trzeciego ma więc następującą postać:

$$S(x) = \begin{cases} 1 + 14x - 6x^2 + \dfrac{5}{2}x^3, & x \in (-\infty, 2),\\ 1 + 2x + 3x^2 + x^3, & x \in [2, 3),\\ 1 + 2x + 3x^2 + x^3, & x \in [3, +\infty). \end{cases}$$