Elementy analizy numerycznej

wykład 11

zadania

1. Równanie $x^2 - 2 = 0$ ma pierwiastki $x_{1,2} = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1{,}414214$. Ile iteracji należy wykonać w metodzie połowienia, aby startując z przedziału [1, 2] obliczyć pierwiastek z dokładnością do czterech miejsc dziesiętnych? Jaki jest maksymalny błąd po tej liczbie iteracji?
2. Pokazać, że równanie
$$\sin x + x - 1 = 0$$
ma pierwiastek w przedziale [0, 1]. Ile iteracji trzeba wykonać, aby metodą połowienia otrzymać przybliżoną wartość pierwiastka z błędem nie przekraczającym $0{,}5 \cdot 10^{-4}$?
3. Ile iteracji należy wykonać, aby metodą połowienia znaleźć pierwiastek równania
$$x^3 - x - 1 = 0$$
z dokładnością 10^{-4}, który leży w przedziale [1, 2]?
4. Stosując metodę *regula falsi* znaleźć z dokładnością do dwóch miejsc dziesiętnych pierwiastek równania
$$x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$$
leżący w przedziale [1, 2].
5. Zastosować metodę Newtona do obliczenia z dokładnością 10^{-2} pierwiastka równania z zadania 4 przyjmując $x^{(0)} = 2$.
6. Stosując metodę Newtona do równania
$$x^n - c = 0$$
wyprowadzić wzór na obliczanie pierwiastka n-tego stopnia z liczby dodatniej c.
7. Odwrotność liczby n można obliczyć za pomocą wzoru iteracyjnego
$$x^{(i+1)} = x^{(i)}(2 - nx^{(i)}).$$
Wyprowadzić ten wzór stosując metodę Newtona do funkcji
$$f(x) = \frac{1}{x} - n.$$

rozwiązania wybranych zadań

zad. 1

W metodzie połowienia szerokość i-tego przedziału dana jest wzorem (5.2) (zob. wykład 11). Pierwsze pytanie sprowadza się zatem do wyznaczenia liczby i tak, by szerokość ta była mniejsza od podanej dokładności, czyli należy rozwiązać nierówność

$$\frac{b-a}{2^i} < 0{,}0001.$$

Ponieważ w zadaniu $[a, b] = [1, 2]$, więc do rozwiązania mamy nierówność

$$\frac{1}{2^i} < \frac{1}{10^4},$$

czyli

$$2^i > 10^4.$$

Po logarytmowaniu mamy

$$\log_2 2^i > \log_2 10^4,$$

a więc

$$i > 4 \cdot \log_2 10. \tag{1}$$

Tablice matematyczne zawierają zwykle przybliżone wartości logarytmów dziesiętnych i naturalnych. Korzystając jednak z wzoru

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b},$$

w którym przyjmiemy $a = 10$, $b = 2$ i $c = 10$, nierówność (1) możemy napisać w postaci

$$i > 4 \cdot \frac{\log 10}{\log 2} \approx 4 \cdot \frac{1}{0{,}30103} \approx 13{,}29.$$

Oczywiście liczba i powinna być całkowita, więc ostatecznie mamy $i = 14$. Błąd po 14 iteracjach (szerokość 14 przedziału) jest równy

$$\frac{1}{2^{14}} = \frac{1}{16384} \approx 0{,}00006.$$

zad. 4

W przedziale [1, 2] podana funkcja jest rosnąca i wypukła, a więc metodę *regula falsi* określają wzory (5.3) (zob. wykład 11), na podstawie których mamy

$$x^{(0)} = 1,$$

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} - \frac{f(x^{(i)})}{f(2) - f(x^{(i)})}(2 - x^{(i)}), \quad i = 0, 1, \ldots,$$

gdzie

$$f(2) = 2^3 + 2^2 - 3 \cdot 2 - 3 = 8 + 4 - 6 - 3 = 3,$$

$$f(x^{(i)}) = \left(x^{(i)}\right)^3 + \left(x^{(i)}\right)^2 - 3 \cdot x^{(i)} - 3.$$

Dla kolejnych wartości i otrzymujemy

$$f(x^{(0)}) = 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 - 3 = 1 + 1 - 3 - 3 = -4,$$

$$x^{(1)} = 1 - \frac{(-4)}{3-(-4)}(2-1) = 1 + \frac{4}{7} \approx 1 + 0{,}57143 = 1{,}57413,$$

$$f(x^{(1)}) = 1{,}57143^3 + 1{,}57143^2 - 3 \cdot 1{,}57413 - 3$$
$$\approx 3{,}88714 + 2{,}47789 - 4{,}72239 - 3 = -1{,}35736,$$

$$x^{(2)} = 1{,}57413 - \frac{(-1{,}35736)}{3-(-1{,}35736)}(2 - 1{,}57413)$$
$$\approx 1{,}57413 + \frac{1{,}35736}{4{,}35736} \cdot 0{,}42587 \approx 1{,}57413 + 0{,}31151 \cdot 0{,}42587$$
$$\approx 1{,}57413 + 0{,}13266 = 1{,}70679,$$

$$f(x^{(2)}) = 1{,}70679^3 + 1{,}70679^2 - 3 \cdot 1{,}70679 - 3$$
$$\approx 4{,}97210 + 2{,}91313 - 5{,}12037 - 3 = -0{,}23514,$$

$$x^{(3)} = 1{,}70679 - \frac{(-0{,}23514)}{3-(-0{,}23514)}(2 - 1{,}70679)$$
$$\approx 1{,}70679 + \frac{0{,}23514}{3{,}23514} \cdot 0{,}29321 \approx 1{,}70679 + 0{,}07268 \cdot 0{,}29321$$
$$\approx 1{,}70679 + 0{,}02131 = 1{,}72810,$$

$$f(x^{(3)}) = 1{,}72810^3 + 1{,}72810^2 - 3 \cdot 1{,}72810 - 3$$
$$\approx 5{,}16068 + 2{,}98633 - 5{,}18430 - 3 = -0{,}03729,$$

$$x^{(4)} = 1{,}72810 - \frac{(-0{,}03729)}{3-(-0{,}03729)}(2 - 1{,}72810)$$
$$\approx 1{,}72810 + \frac{0{,}03729}{3{,}03729} \cdot 0{,}27190 \approx 1{,}72810 + 0{,}01228 \cdot 0{,}27190$$
$$\approx 1{,}72810 + 0{,}00334 = 1{,}73144.$$

Różnica między czwartym i trzecim przybliżeniem wynosi

$$\left| x^{(4)} - x^{(3)} \right| = 1{,}73144 - 1{,}72810 = 0{,}00334 < 0{,}01,$$

a więc z dokładnością do dwóch miejsc dziesiętnych pierwiastkiem równania leżącym w przedziale [1, 2] jest 1,73 (dokładnym pierwiastkiem jest $\sqrt{3}$).

zad. 7

Dla podanej funkcji $f(x)$ mamy

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Stosując metodę Newtona (zob. wykład 11 wzór 5.6) otrzymujemy

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} - \frac{\dfrac{1}{x^{(i)}} - n}{\left(-\dfrac{1}{(x^{(i)})^2} \right)} = x^{(i)} + \frac{\dfrac{1 - nx^{(i)}}{x^{(i)}}}{\dfrac{1}{(x^{(i)})^2}}$$

$$= x^{(i)} + x^{(i)}(1 - nx^{(i)}) = x^{(i)}(2 - nx^{(i)}),$$

co kończy wyprowadzenie wzoru podanego w zadaniu.