Podstawy algorytmów rekurencyjnych

mgr inż. Adam Kozak Adam.Kozak@cs.put.poznan.pl
mgr inż. Tomasz Głowacki tglowacki@cs.put.poznan.pl

Zajęcia finansowane z projektu "Rozwój i doskonalenie kształcenia na Politechnice Poznańskiej w zakresie technologii informatycznych i ich zastosowań w przemyśle" POKL.04.01.02-00-189/10

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Plan

- Czym jest rekurencja?
- Indukcja matematyczna
- Niezmienniki pętli
- Realizacja rekurencji
- Fraktale
  - Cechy
  - Układy iterowanych odwzorowań afinicznych
  - Zbiory Mandelbrota
  - Zbiory Julii

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rekurencja

- O rekurencji (rekursji) mówimy wtedy, gdy definicja pewnego obiektu (np. matematycznego) zawiera odwołanie do pewnej transformacji tego obiektu,
- Aby znaleźć transformację tego obiektu należy ponownie zastosować tą samą definicję itd...

- Każda definicja rekurencyjna składa się z:
  - zależności rekurencyjnej
  - wyrażenia startowego (podstawy wnioskowania, warunku brzegowego)

Przykłady definicji rekurencyjnych

- Silnia:
  - zależność rekurencyjna: n! = n (n-1)!
  - wyrażenie startowe: 0! = 1
- Współczynnik dwumianowy:
  - zależność rekurencyjna: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
  - wyrażenie startowe: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- Zbiór liczb całkowitych podzielnych przez d ≥ 1 :
  - zależność rekurencyjna: $Z_d = \bigcup_{i=0}^{\infty} n_i$ gdzie $n_k = \frac{1-\mathrm{sgn}(n_{k-1}-0{,}5)}{2} d - n_{k-1}$
  - wyrażenie startowe $n_0 = 0$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykładowe zadania

- Znajdź definicję rekurencyjną ciągu eliminując w pełni bezpośrednią zależność od n (n ≥ 0):

$$c_n = n^2 - 1$$

- Dla ciągów reprezentowanych przez funkcje posiadające funkcję odwrotną można skorzystać ze schematu:

$$c_n = f(n) \Rightarrow n = f^{-1}(c_n)$$
$$c_{n+1} = f(n+1) = f\left(f^{-1}(c_n) + 1\right)$$

- Inne: $c_n = 3^{n^2+2n+1},\ n \geq 0 \quad \left\langle c_0 = 3,\ \ c_n = c_{n-1} 3^{2\sqrt{\log_3 c_{n-1}}+1} \right\rangle$

$c_n = n^2 - n - 2,\ n \geq 1 \quad \left\langle c_1 = -2,\ \ c_n = c_{n-1} + \sqrt{9 + 4c_{n-1}} + 1 \right\rangle$

Indukcja matematyczna

- Indukcja matematyczna jest twierdzeniem opartym na szczególnym przypadku zależności rekurencyjnej na zdaniach logicznych
- Zależnością rekurencyjną jest implikacja między kolejnymi zdaniami logicznymi
- Wyrażeniem startowym jest warunek początkowy

Zasada indukcji skończonej	**Zasada silnej indukcji (zupełnej)**
•ZR : $S(k) \Rightarrow S(k+1)$ •WP : $S(n_0)$	•ZR : $S(n_0) \wedge S(n_0+1) \wedge \ldots \wedge S(n-1) \wedge S(n) \Rightarrow S(n+1)$ •WP: $S(n_0) \wedge S(n_0+1) \wedge \ldots \wedge S(n_1)$

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykładowe zadania

➲ **Udowodnij, używając indukcji matematycznej:**

1. Dla n ≥ 1: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

2. Dla n ≥ 1: $\left(\sum_{i=1}^{n} i \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^3$

3. Nierówność Bernoulliego dla liczb całkowitych, x > -1, n ≥ 1:

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

4. Dla d ≥ 1, n ≥0, ciąg 0, d, -d, 2d, -2d, ..., nd, -nd dany wzorem rekurencyjnym $c_0 = 0,\ c_n = \frac{1-\operatorname{sgn}(c_{n-1}-0{,}5)}{2} d - c_{n-1}$ ma postać jawną: $c_n = \frac{1}{4} d \left[(-1)^{n+1}(2n+1)+1 \right]$

Przykładowe zadania c.d.

5. Dla n ≥ 2: $2^{2^n} - 6$ jest podzielne przez 10.

6. Dla n ≥ 0, a,b≠0, jeśli $c_0 = 0,\ c_1 = b - a,\ c_n = (a+b)c_{n-1} - abc_{n-2}$
   to wzór jawny na ciąg ma postać: $c_n = b^n - a^n$

7. Dla n ≥ 0: n^3-n jest podzielne przez 6.

8. Dla n ≥ 1: $F_n = \frac{1}{5}\left(L_{n-1} + L_{n+1}\right)$ gdzie F_n to liczby Fibonacciego, a L_n liczby Lucasa:

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$
$$L_0 = 2, F_1 = 1, L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

Niezmienniki pętli

- Zdanie logiczne λ jest niezmiennikiem pętli:

```
while (g) {
    instrukcje;
}
```

jeśli zachodzi implikacja:

- jeśli g i λ są prawdziwe przed wejściem do pętli, to λ jest prawdziwe w każdej iteracji, oraz po wyjściu z pętli, natomiast g po wyjściu z pętli jest fałszem:

$$\begin{array}{l} \mathit{inicjalizacja\ zmiennych} \\ //\ g \wedge \lambda = 1 \\ \mathit{while}(g)\{\ \mathit{instrukcje};\ \} \\ //\ \neg g \wedge \lambda = 1 \end{array}$$

Niezmienniki pętli

- Zastosowanie?
  - Dowodzenie poprawności algorytmów
  - Sprawdzanie działających algorytmów (np. asercje przed, wewnątrz i po pętli sprawdzające warunki będące znanym niezmiennikiem)
- Klasyczny przykład – algorytm dzielenia, znajdujący dla liczb n ≥ 0, q > 0 (dzielnik), liczby k ≥ 0 (krotność), oraz resztę r: q > r ≥ 0, spełniające równość n=kq+r

$$< input > n \geq 0;\ q > 0;$$

$$< init > k = 0;\ r = n;$$

$$< assert > g \wedge \lambda = 1:\quad g \Leftrightarrow r \geq q,\quad \lambda \Leftrightarrow (n = kq + r) \wedge (r \geq 0)$$

$$while(g)\{$$

$$\quad < instructions > k = k + 1;\ r = r - q;$$

$$\quad < assert > \lambda = 1$$

$$\}$$

$$< assert > \neg g \wedge \lambda = 1:\ \neg g \Leftrightarrow r < q,\quad \lambda \Leftrightarrow (n = kq + r) \wedge (r \geq 0)$$

Inne trywialne niezmienniki pęli:
- q ≥ 0
- n ≥ r

Dowód poprawności

- W każdej interacji otrzymywane są nowe wartości zmiennych k oraz r:

$$k' = k + 1$$

$$r' = r - q$$

- Podstawiając nowe wartości do zależności niezmiennika:

$$k'q + r' = (k+1)q + (r-q) = kq + q + r - q = kq + r$$

- Przy czym r′ ≥ 0, gdyż warunkiem wejścia do pętli jest r ≥ q
- Po wyjściu z pętli r < q, więc spełniona jest zakładana własność q > r ≥ 0

Niezmienniki pętli - zadanie

- Znajdź niezmiennik pętli i udowodnij poprawność algorytmu:
  Dane wejściowe: n > 0.
  Dane wyjściowe: k ≥ 0, q ≤ n ($k, q \in N$) takie, że $n = 2^k q \;\wedge\; 2 \nmid q$

$$< input > n > 0;\ k \geq 0;$$

$$< init > k = 0;\ q = n;$$

$$< assert > g \wedge \lambda = 1:\quad g \Leftrightarrow 2 \mid q,\quad \lambda \Leftrightarrow \text{..}$$

$$while(g)\{$$

$$\quad < instructions > k = k + 1;\ q = q/2;$$

$$\quad < assert > \lambda = 1$$

$$\}$$

$$< assert > \neg g \wedge \lambda = 1:\ \neg g \Leftrightarrow 2 \nmid q,\quad \lambda \Leftrightarrow \text{..}$$

Realizacja rekurencji

- Rekurencja w językach programowania jest zwykłym wywołaniem funkcji (funkcja sama wywołuje siebie)
- Każde wywołanie funkcji to odłożenie parametrów na stosie (parametry funkcji oraz adres powrotu)
- Dla każdego algorytmu rekurencyjnego należy rozważyć koszty pamięciowe i obliczeniowe podejścia rekurencyjnego oraz iteracyjnego
- Np. Algorytm wypełniania spójnego obszaru szybko może doprowadzić do przepełnienia stosu (wersja iteracyjna jest bardziej oszczędna):

```
int image[][], width, height, oldColor, newColor;
void fill(int x, int y)
{
  if (x<0 || y<0 || x>=width || y>=height) return;
  image[x][y] = newColor;
  if (image[x+1][y] == oldColor) fill(x+1,y);
  if (image[x-1][y] == oldColor) fill(x-1,y);
  if (image[x][y+1] == oldColor) fill(x,y+1);
  if (image[x][y-1] == oldColor) fill(x,y-1);
}
```

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

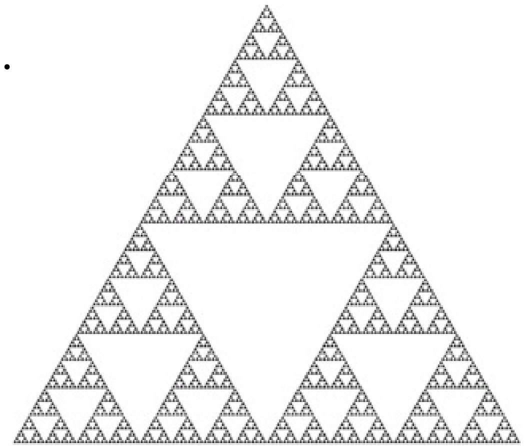
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Fraktale

- Obiekty geometryczne posiadające cechę samopodobieństwa (w każdej skali) – w sensie dokładnym, przybliżonym lub stochastycznym
- Wymiar nie jest liczbą całkowitą:

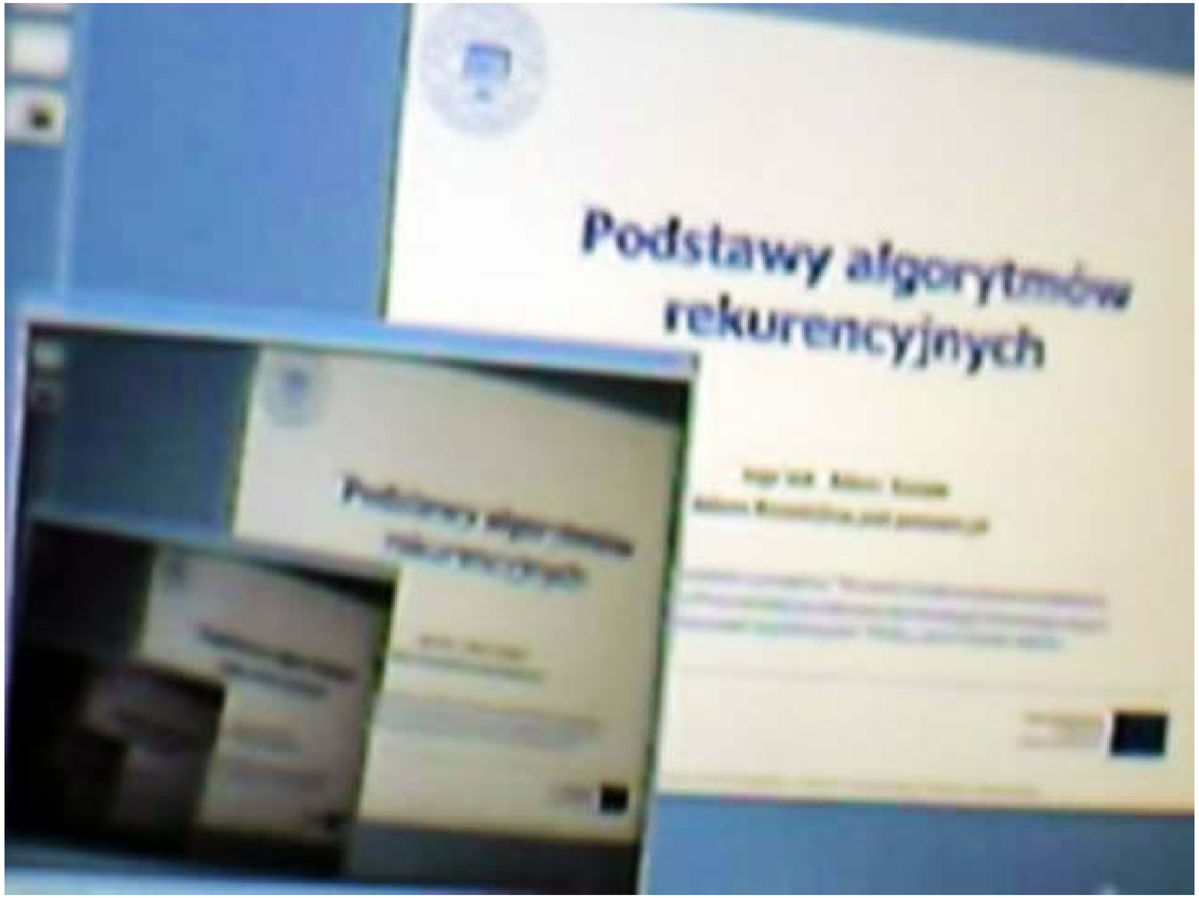
$$N(\varepsilon) \sim (1/\varepsilon)^d \Rightarrow d = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}$$

$$\varepsilon = 1/2^n, \; N(\varepsilon) = 3^n \;\Rightarrow\; d_{TS} = \lim_{n \to \infty} \frac{\log 3^n}{\log 2^n} = \frac{\log 3}{\log 2} = 1{,}58496\ldots$$



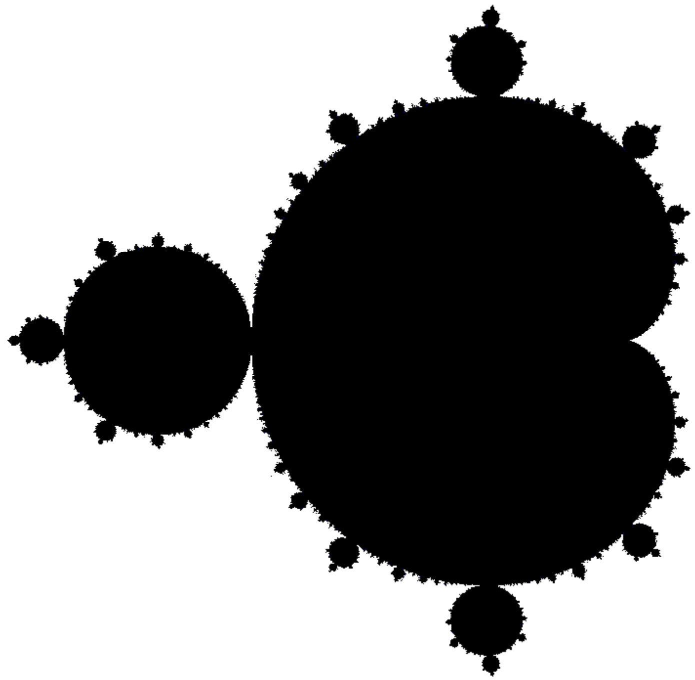
- Mają stosunkowo proste definicje rekurencyjne

Obraz rekurencyjny



Fraktale

- **Fraktale to np.:**
  - **Atraktory układu iterowanych odwzorowań afinicznych (IFS)**
  - **Zbiory Julii i Fatou**
  - **Zbiory Mandelbrota**



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

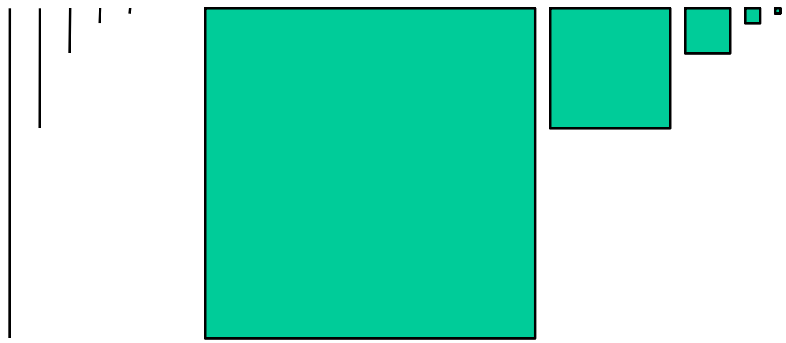
Odwzorowanie zwężające

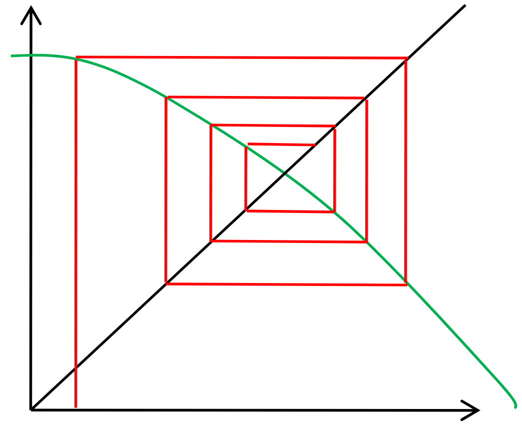
- Niech $\Re^2$ będzie przestrzenią z metryką euklidesową d (choć mogą być dowolne przestrzenie metryczne), wtedy f: $\Re^2 \rightarrow \Re^2$ jest odwzorowaniem zwężającym jeśli:

$$\exists \lambda \in (0,1): \forall a_1, a_2 \in \Re^2 : d\big(f(a_1), f(a_2)\big) \leq \lambda d(a_1, a_2)$$

- Twierdzenie Banacha: Istnieje dokładnie jeden punkt p taki, że f(p)=p (punkt stały odwzorowania zwężającego)

Rekurencyjne wykonanie odwzorowania zwężającego a=(x,y) f(x,y)=(x/3,y/3)





$$x_{n+1} = f(x_n) \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x_\infty \qquad x_\infty = f(x_\infty) \qquad \cos\left(\tfrac{\pi}{10}\right) \rightarrow \cos\left(\cos\tfrac{\pi}{10}\right) \rightarrow \cos\left(\cos\left(\cos\tfrac{\pi}{10}\right)\right)$$

Układ iterowanych odwzorowań afinicznych

- Rekurencyjna definicja przekształceń obiektu geometrycznego będąca sumą wyników n odwzorowań zwężających (złożenie obrotu, translacji i skalowania zmniejszającego): $\{F_i\}$ $(1 \le i \le n)$

$$S_0 = S \qquad S_k = \bigcup_{i=1}^{n} F_i(S_{k-1}) \qquad S_\infty = \lim_{k \to \infty} S_k$$

- S jest dowolnym niepustym zbiorem punktów w danej przestrzeni
- S_∞ jest fraktalem - atraktorem układu odwzorowań (punktem stałym), niezależnym od rozkładu punktów w zbiorze S
- F_i w przestrzeni $\Re^2$ ma postać:

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = dx + ey + f \end{cases} \Leftrightarrow F_i(x,y) = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi_x & -\sin\varphi_y \\ \sin\varphi_x & \cos\varphi_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

$$-1 < \delta_x < 1 \quad \wedge \quad -1 < \delta_y < 1$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Przykład konstrukcji IFS - Trójkąt Sierpińskiego

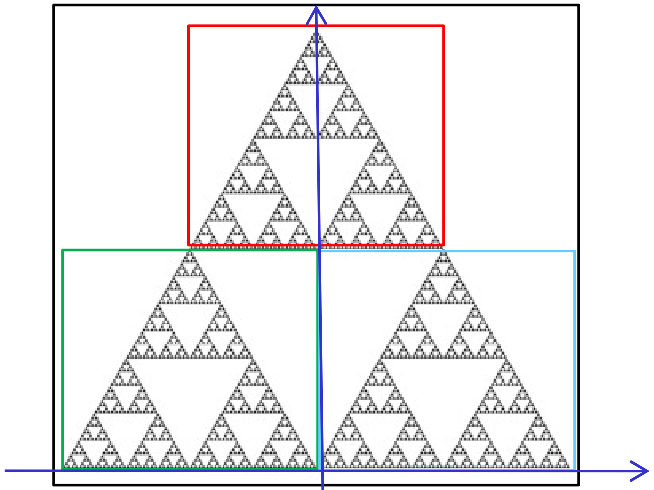
- Układ odwzorowań:

$$\varphi_x = \varphi_y = 0$$

$$F_1(x,y) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F_2(x,y) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

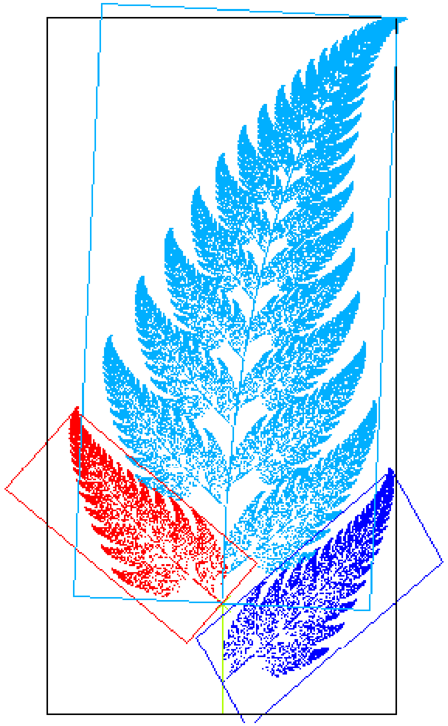
$$F_3(x,y) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3}/4 \end{bmatrix}$$



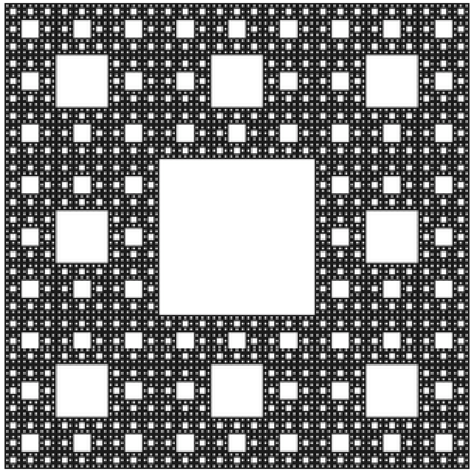
- Trójkąt Sierpińskiego jest punktem stałym układu odwzorowań zwężających $\{F_1, F_2, F_3\}$

IFS – zadania

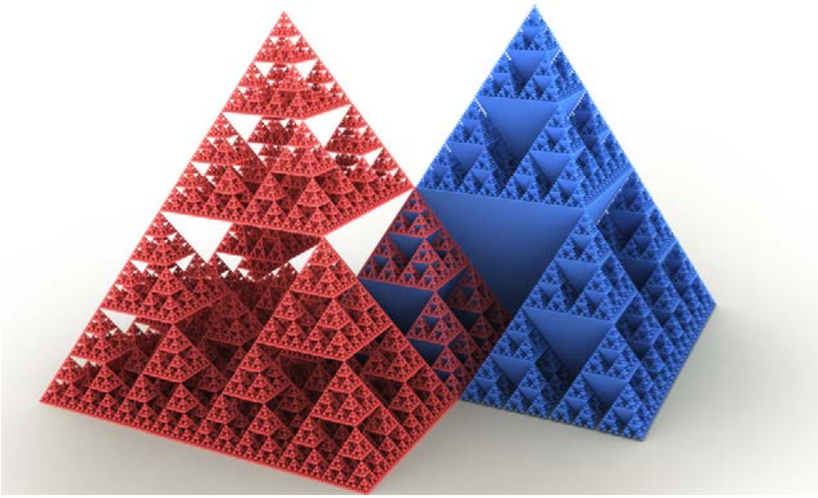
Zadanie: zlokalizuj poszczególne odwzorowania ((*) zdefiniuj)



Paproć Barnsleya
Układ 4 odwzorowań
[źródło: Wikipedia]



Dywan Sierpińskiego
Układ 8 odwzorowań
[źródło: Wikipedia]



Trójkąt Sierpińskiego w przestrzeni 3D (piramida)
Układ 5 odwzorowań
[źródło: Wikipedia]

Zbiory Mandelbrota

- Przestrzenią dla tych zbiorów jest domknięty zbiór $\overline{C}$ liczb zespolonych ($\overline{C} = C \cup \{z^*\}$ gdzie z* to punkt w nieskończoności odwzorowany np. na sferze Riemanna)
- Funkcja wymierna określona na C ma postać:

$$W(z) = \frac{w(z)}{l(z)} = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0}{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \ldots + b_1 z + b_0}$$

- Niech W_c będzie funkcją wymierną zależną od $c \in \overline{C}$
- Niech $W_c^n(z) = W_c\left(W_c^{n-1}(z)\right)$
- Zbiorem Mandelbrota $M(W_c)$ nazywamy zbiór tych wartości parametru c dla których ciąg $W_c^n(0)$ jest zbieżny:

$$M\left(W_c\right) = \{c \in C : \lim_{n\to\infty} W_c^n(0) \not\to \infty\}$$

Zbiory Mandelbrota - przykład

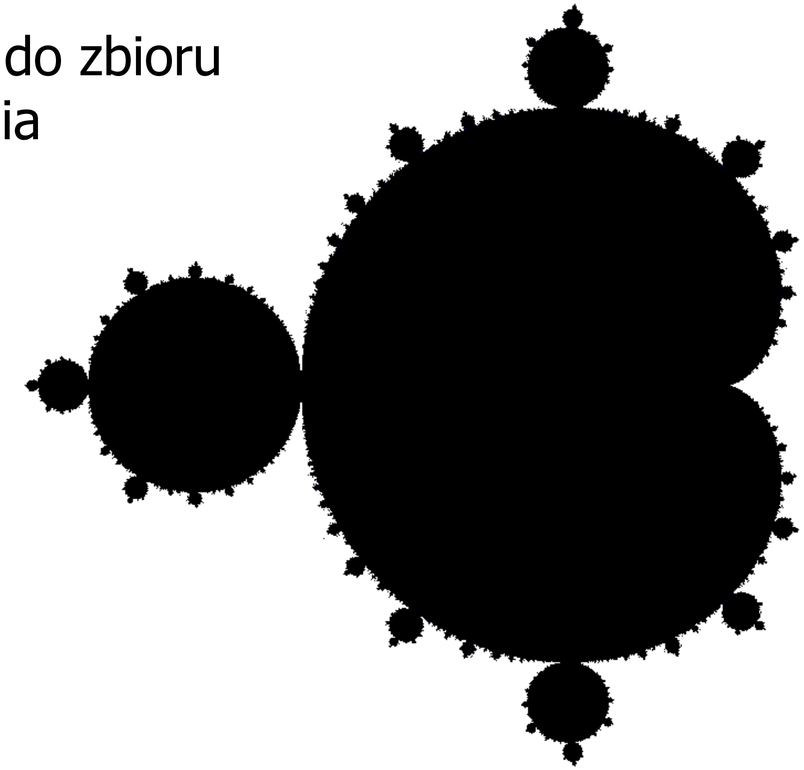
- Najbardziej znany jest zbiór Mandelbrota dla odwzorowania

$$W_c^n(z) = z^2 + c$$

- Sprawdź, czy punkt c=0+i należy do zbioru Mandelbrota dla tego odwzorowania

orbita punktu c

$$\begin{cases} W_c^1(0) = 0^2 + i = i \\ W_c^2(0) = i^2 + i = i - 1 \\ W_c^3(0) = (i-1)^2 + i = -1 - 2i + 1 + i = -i \\ W_c^4(0) = (-i)^2 + i = -1 + i = i - 1 \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

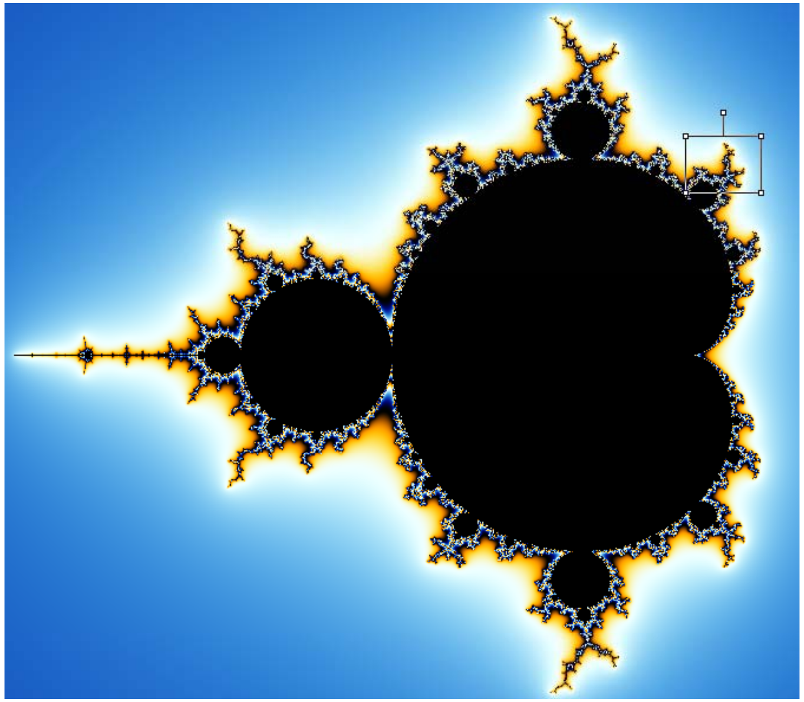


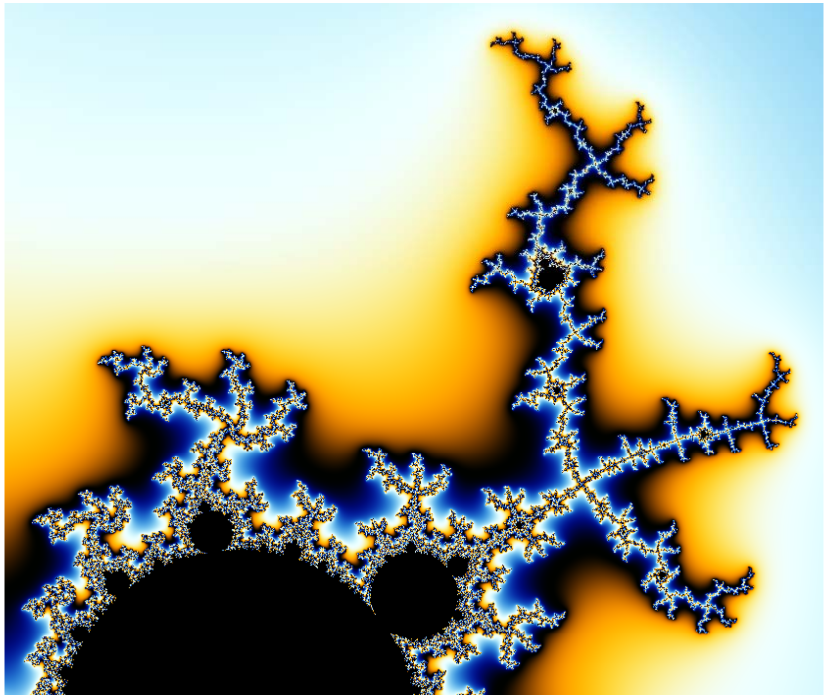
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

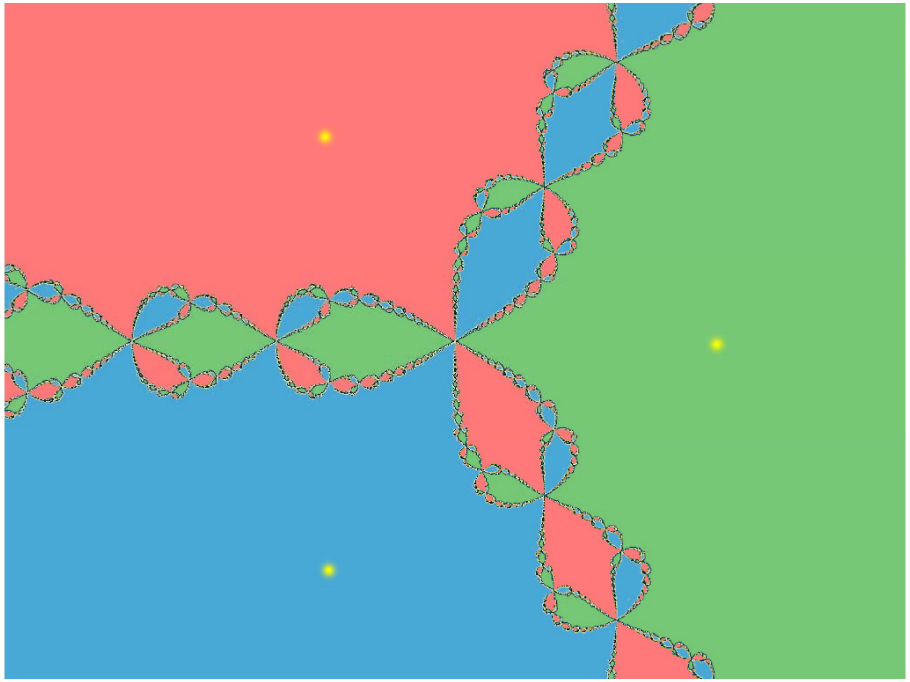
Zbiory Mandelbrota - ilustracja





Zbiór Mandelbrota wraz z powiększeniem [obraz uzyskany za pomocą programu Ultra Fractal]

Zbiory Julii



Brzeg między kolorami (basenami przyciągania) jest zbiorem Julii dla odwzorowania:

$$W_c^n(z) = \left(2z + z^{-2}\right)/3$$

Do zbioru Fatou należą obszary przyciągania 3 punktów stałych będących pierwiastkami funkcji

$$f(z) = z^3 - 1 \;\Rightarrow\; z^3 = 1 \;\Rightarrow\; z_{k\in\{0,1,2\}} = \sqrt[3]{|1|}\, e^{i\frac{0+2k\pi}{n}}$$

$$z_0 = 1,\quad z_1 = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)/2,\quad z_2 = -\left(1 + i\sqrt{3}\right)/2,$$

$$W_c^n(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)} = z - \frac{z^3 - 1}{3z^2} = \left(2z + z^{-2}\right)/3$$

Jest to zbiór Julii dla odwzorowania $W_c^n(z)$ otrzymanego metodą Newtona szukania miejsc zerowych dla f(z). Stąd punkty stabilne tego odwzorowania będą pierwiastkami f(z). Kolor zielony jest basenem przyciągania z_0, kolor czerwony z_1, a kolor niebieski z_2.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego